

# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

---

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

## Il momento angolare orbitale della luce

**Relatore:**

Prof. Stefano Giusto

**Laureanda:** Arianna Renzini

---

**Anno Accademico 2013/2014**



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Simmetrie del problema</b>	<b>9</b>
	Il teorema di Nöther e le simmetrie del campo . . . . .	9
	Il momento angolare del campo elettromagnetico . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Scomposizione quantomeccanica del momento angolare</b>	<b>15</b>
	Passaggio allo spazio dei momenti . . . . .	15
	Descrizione quantomeccanica dei fotoni . . . . .	16
	Descrizione classica del campo elettromagnetico e principio di corrispondenza	19
	Scomposizione del momento angolare . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Un esempio di campo con <math>J_L \neq 0</math>: i <i>Bessel Beams</i></b>	<b>25</b>
<b>A</b>	<b>Relazioni delle onde</b>	<b>31</b>
<b>B</b>	<b>Funzioni di Bessel ordinarie</b>	<b>33</b>
<b>C</b>	<b>Dimostrazioni aggiuntive</b>	<b>35</b>

La descrizione fisica della luce tiene conto sia della sua natura ondulatoria sia di quella particellare. Il comportamento ondulatorio trova la sua formulazione matematica nelle equazioni di Maxwell, le quali possono essere derivate attraverso metodi variazionali; l'aspetto particellare è invece puramente quantistico e si basa sul concetto einsteiniano di quanto di luce.

Dalla descrizione classica della luce emerge una quantità associata al campo elettromagnetico che si comporta come un momento angolare; ovvero, derivando le correnti conservate attraverso il teorema di Nöther si ottiene un tensore conservato legato all'invarianza per rotazioni del sistema, e che dunque si identifica con il momento angolare canonico. Tuttavia, questo tensore conservato non è invariante di gauge, e dunque non è univocamente definito. Questa quantità può essere scomposta in parte intrinseca (di spin), che dipende da come il campo trasforma rispetto alle trasformazioni di Lorentz, ed estrinseca (orbitale), che non vi dipende. Questa distinzione emerge in maniera naturale dalla forma della corrente momento angolare, ma non essendo quest'ultima invariante di gauge, nemmeno il momento angolare intrinseco ed estrinseco saranno ben definiti. Il nostro interesse è allora derivare teoricamente questa distinzione e capire come si conciliano il lato quantistico e quello classico; in particolare, ci concentriamo sul momento angolare orbitale, il quale non è trasportato dalle onde piane elementari ed è dunque più difficile da osservare rispetto a quello di spin. Dopo aver dato una visione teorica completa di questa quantità, esporremo un esempio di campo elettromagnetico che trasporta anche momento angolare orbitale.

# Capitolo 1

## Introduzione

Il mondo scientifico già da diversi anni è interessato a descrivere precisamente il momento angolare orbitale trasportato dalla radiazione elettromagnetica, e capire come si articola la distinzione da quello di spin introdotto dalla meccanica quantistica. Questo interesse non è puramente formale; il momento angolare orbitale della luce si può misurare direttamente o indirettamente attraverso molteplici procedure, a cui accenneremo più avanti, e può anche svolgere una parte centrale nella misura di altre quantità<sup>1</sup>. Vi sono, tuttavia, delle difficoltà nel definire il momento angolare totale e le sue componenti orbitale e di spin del campo elettromagnetico; vediamo allora da dove derivano queste difficoltà.

Parlare del momento angolare del campo libero è di per sé una questione che va chiarita: non stiamo infatti trattando corpi rigidi per i quali il momento angolare è definito dai tempi di Newton, ma un fenomeno che ha caratteristiche sia ondulatorie che particellari. Infatti, in assenza di cariche la propagazione della radiazione elettromagnetica può essere descritta o sotto forma di onde soluzioni delle equazioni di Maxwell, oppure sotto forma di un fascio di particelle di massa nulla (fotoni) che viaggiano a velocità  $c$ .

Si ricordi che classicamente il momento angolare di un corpo si distingue in due componenti vettoriali separate: il momento angolare orbitale  $\mathbf{J}_L$  e quello intrinseco (o di spin)  $\mathbf{J}_S$ ; il primo è associato al moto di rotazione del centro di massa del corpo ed ha direzione perpendicolare al piano del moto, invece il secondo è associato alla rotazione del corpo attorno a un proprio asse e ha direzione parallela a tale asse. Per quanto riguarda i fotoni, che sono particelle senza massa, il momento angolare di spin è definito solo nella direzione del moto e si chiama elicità; d'ora in avanti confonderemo lo spin e l'elicità dei fotoni per non variare la terminologia, e vedremo nel Capitolo 3 che nella nostra descrizione essi coincidono. Non è tuttavia immediato definire il momento angolare orbitale per i fotoni.

In passato il campo elettromagnetico è stato studiato approfonditamente nell'ambito classico, e sono state trovate le sue quantità conservate attraverso metodi variazionali ed il teorema di Nöther [1]. Tuttavia l'espressione del momento angolare totale così derivata non è univocamente definita, non essendo gauge-invariante, e così non lo sono nemmeno le sue due componenti orbitale e di spin. Questo pone chiaramente un problema, dato che il campo elettromagnetico è invariante di gauge e quindi tali devono essere anche le quantità ad esso associate. Questo problema può essere parzialmente risolto attraverso un processo di simmetrizzazione (di cui parleremo nel Capitolo 2), che però è applicabile solo se il campo elettromagnetico pre-

---

<sup>1</sup>Ci riferiamo ad esempio agli esperimenti di biofisica, nei quali si misurano piccole forze associate a singole cellule sottoponendole a fasci laser (*optical tweezers*) che trasportano momento angolare orbitale e studiandone la risposta.

so in considerazione si annulla all'infinito; si presentano così degli apparenti paradossi quando si calcola il momento angolare orbitale e di spin per le soluzioni delle equazioni di Maxwell che non hanno questa proprietà. Lo scopo finale di questa tesi è dunque definire in maniera chiara i momenti angolari orbitale e di spin trasportati dalla radiazione elettromagnetica nel vuoto.

Abbiamo delle nozioni riguardanti il momento angolare di spin dalla descrizione quantistica del fotone: esso è un bosone di spin 1, ha energia  $H = \hbar\omega$  e componente  $z$  del momento angolare di spin  $J_{S,z} = \sigma\hbar$ , ove  $\sigma$  è un parametro che dipende dalla polarizzazione; precisamente,  $\sigma$  è il valore di aspettazione dell'elicità, e vale  $\sigma = 0$  per la luce polarizzata linearmente e  $\sigma = \pm 1$  per la luce polarizzata circolarmente con verso rispettivamente levogiro o destrigiro [2]. Si noti che il rapporto tra densità di momento angolare di spin e densità di energia di un fotone o di un insieme di fotoni è  $\frac{\sigma}{\omega}$ ; questo risultato lo ritroveremo nel corso della trattazione. Si hanno inoltre informazioni circa il momento angolare totale  $\mathbf{J}$  di un fotone, ad esempio dalle transizioni elettriche e magnetiche degli atomi. Dato che esistono transizioni per le quali  $|\Delta\mathbf{J}| > 1$ , significa che vi dev'essere una seconda parte del momento angolare distinta da  $\mathbf{J}_S$ , chiamata momento angolare orbitale  $\mathbf{J}_L$  per continuità con le teorie classiche, così che  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_S + \mathbf{J}_L$ ; il  $\mathbf{J}_L$  e il  $\mathbf{J}_S$  di uno stesso fotone sono in generale quantità difficili da definire in maniera indipendente l'una dall'altra [3], non obbediscono alle regole di commutazione che definiscono un momento angolare [4] e solo alcune componenti sono quantità osservabili [5]. Una formulazione corretta del momento angolare del campo elettromagnetico dovrà quindi rendere conto di queste caratteristiche quantistiche dei fotoni.

Abbiamo già accennato all'interesse sperimentale per questo fenomeno; in particolare esso nasce dal fatto che un'onda elettromagnetica che trasporta  $\mathbf{J}_L$  genera dei vortici elettromagnetici<sup>2</sup>, i quali possono essere utilizzati ad esempio per guidare particelle cariche [6]. Inoltre, il momento angolare orbitale del campo può essere trasferito agli atomi in modo tale da cambiare il loro stato e/o catturarli (*optical tweezing*, *optical trapping* [7], [8]). Sono stati sviluppati molti strumenti in base alle proprietà delle onde provviste di  $\mathbf{J}_L$  che vengono utilizzati in esperimenti all'avanguardia volti a studiare singoli atomi o cellule.

È utile quindi definire teoricamente  $\mathbf{J}_L$  e  $\mathbf{J}_S$  e trovare soluzioni nuove alle equazioni di Maxwell con  $\mathbf{J}_L$  non banale, per dare così fondamento ad esperimenti di questo tipo.  $\mathbf{J}_L$ , in generale, è legato alla componente azimutale del vettore di Poynting, ovvero alla proiezione di tale vettore sul fronte d'onda [2]; di fatto le onde piane hanno  $\mathbf{J}_L = 0$ , dato che il vettore di Poynting per queste onde non ha componente azimutale. Un'onda che abbia  $\mathbf{J}_L \neq 0$  avrà fronti d'onda elicoidali come mostrato in Figura 1.1.

Sono state studiate diverse famiglie di soluzioni alle equazioni di Maxwell con le caratteri-

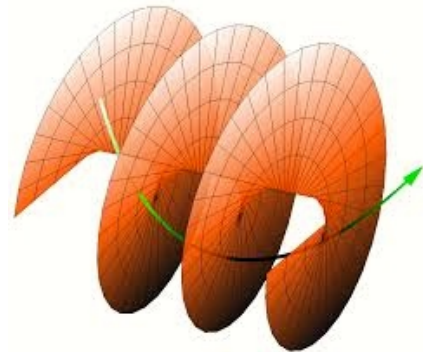


Figura 1.1: Fronti elicoidali caratterizzati da un termine di fase azimutale  $m = 1$  e il vettore di Poynting associato (in verde); la componente azimutale di quest'ultimo genera il momento angolare orbitale.

<sup>2</sup>Questi vortici sono chiamati *optical vortices* in letteratura, e corrispondono a punti singolari del campo ottico nei quali la fase del campo non è definita.

stiche sopracitate, distinte tra loro per metodi generativi e/o proprietà particolari. Citiamo a questo proposito tre famiglie di soluzioni che trasportano  $J_L$ : i *Bessel beams*, i *Laguerre-Gauss beams* e i *Mathieu beams* [2]. I *Bessel beams*<sup>3</sup> sono soluzioni esatte delle equazioni di Maxwell (mentre i *LG beams* si costruiscono in base a soluzioni approssimate<sup>4</sup>) e hanno la proprietà di essere invarianti per propagazione [9]; quest'ultima proprietà li rende estremamente adatti a trasportare particelle anche per distanze rilevanti [10].

Due temi attinenti, ma che non affronteremo in questo elaborato, sono la generazione pratica di questi fasci e la misurazione del loro  $J_L$ . Sono stati ideati diversi modi per convertire onde piane in onde elicoidali; ad esempio, si possono costruire dei polarizzatori costituiti da spirali di materiale birfrangente (*spiral phaseplates* [2], [11], in Figura 1.2) che trasformano onde piane in onde con una fase azimutale. In particolare, se il polarizzatore ha spessore ottico  $d = \frac{\lambda m \phi}{2\pi}$ , imprimerà sull'onda trasmessa una fase azimutale  $m\phi$ .

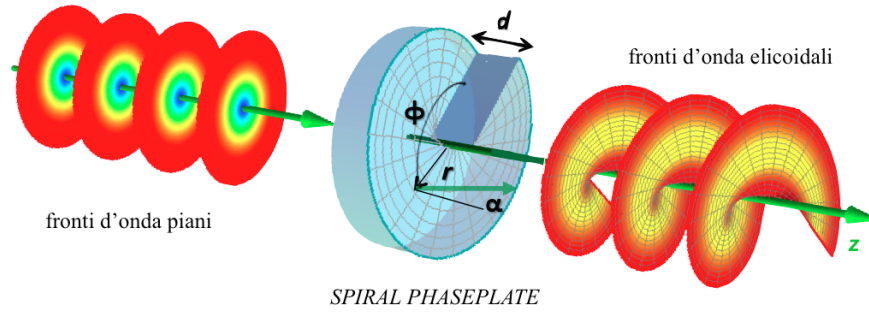


Figura 1.2: Un'onda piana che si propaga lungo la direzione  $z$  entra in un *spiral phaseplate*, ovvero una lastra di materiale birfrangente tagliata a forma di spirale in modo tale da modificare la forma dei fronti d'onda della luce entrante. Il fascio uscente è un'onda elicoidale che si propaga sempre lungo  $z$  con fase azimutale  $m\phi$ .

Per misurare il  $J_L$  trasportato da un'onda elicoidale si può ad esempio far interferire due onde con fase azimutale uguale in modulo ed opposta in segno [12]; ciò che si ottiene è una figura di interferenza con struttura a petalo, ed è stato mostrato da Litvin, Dudley e Forbes che il numero di petali è proprio  $2m$ .

Per trovare una formulazione semplice e corretta per le quantità  $J_L$  e  $J_S$  del campo elettromagnetico partiremo da un'analisi delle simmetrie del problema, derivando tramite il teorema di Nöther le quantità conservate e ne vedremo le patologie. Troveremo una descrizione del sistema che tenga conto sia dell'aspetto classico che di quello quantistico del campo elettromagnetico, risolvendo le questioni poste dalla teoria di Nöther. Studieremo infine un esempio di campo che presenti un  $J_L$  non banale tra quelli sopracitati: i *Bessel beams*.

<sup>3</sup>Ne parleremo approfonditamente nel Capitolo 4

<sup>4</sup>Sono onde elementari in approssimazione parassiale con simmetria cilindrica [5]





## Capitolo 2

# Simmetrie del problema

Esponiamo brevemente in questa sezione la derivazione delle correnti conservate del campo elettromagnetico a partire dalle simmetrie del problema; porremo subito l'attenzione sul momento angolare associato al campo e mostreremo nel dettaglio quali sono le difficoltà citate nell'Introduzione che sorgono nel definire e calcolare le varie quantità che ci interessano.

### Il teorema di Nöther e le simmetrie del campo

Prima di affrontare direttamente le proprietà del campo elettromagnetico, introduciamo brevemente la teoria di Nöther applicata a un generico campo  $\phi_r(t, \mathbf{r})$ <sup>1</sup> di lagrangiana  $\mathcal{L}$  la cui azione è invariante per simmetrie di Poincaré [1].

Il teorema di Nöther per le teorie di campo sostiene che ad ogni gruppo di simmetrie del campo corrisponde una quantità conservata, purché i campi soddisfino le equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} = 0.$$

L'azione del campo sarà

$$I[\phi_r] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi_r(x^\mu), \partial_\nu \phi_r(x_\mu));$$

se essa è invariante sotto le simmetrie del gruppo di Poincaré<sup>2</sup>, applicando il principio di minima azione si ottengono 10 correnti conservate, una per ogni parametro del gruppo. Si ricorda che la variazione di un generico campo sotto trasformazioni di Poincaré è

$$\bar{\phi}_r = \phi'_r(x') - \phi_r(x) = \frac{1}{2} \omega_{\alpha\beta} (\Sigma^{\alpha\beta})_r^s \phi_s, \quad (2.1)$$

e la variazione delle coordinate è

$$\delta x^\mu = x'^\mu - x^\mu = a^\mu + \omega^\mu{}_\nu x^\nu \quad (2.2)$$

ove  $\omega_{\alpha\beta}$  è il parametro della trasformazione relativo alle rotazioni infinitesime,  $a_\nu$  è il parametro relativo alle traslazioni e  $(\Sigma^{\nu\lambda})_r^s$  è un tensore che dipende da come il campo in questione

<sup>1</sup>Il pedice "r" rappresenta i gradi di libertà del campo.

<sup>2</sup> il gruppo di Poincaré è il gruppo delle isometrie dello spaziotempo di Minkowski.

si trasforma per le trasformazioni di Lorentz.

Le 10 correnti conservate sono tutte contenute nel quadrivettore conservato

$$C^\mu = -a_\nu \tilde{T}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \omega_{\nu\lambda} \tilde{M}^{\mu\nu\lambda},$$

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)} \partial^\nu \phi_r - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad \tilde{M}^{\mu\nu\lambda} = x^\nu \tilde{T}^{\mu\lambda} - x^\lambda \tilde{T}^{\mu\nu} + \left(\Sigma^{\nu\lambda}\right)_r^s \phi_s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)} \quad (2.3a)$$

$$\text{con} \quad \partial_\mu \tilde{T}^{\mu\nu} = 0 \quad \partial_\mu \tilde{M}^{\mu\nu\lambda} = 0, \quad (2.3b)$$

I tensori  $\tilde{T}^{\mu\nu}$  e  $\tilde{M}^{\mu\nu\lambda}$  si conservano separatamente (2.3b) e corrispondono l'uno a 4 e l'altro a 6 correnti conservate. Si può riscrivere  $\tilde{M}^{\mu\nu\lambda}$  come la somma di due tensori, l'uno che dipende da  $\left(\Sigma^{\nu\lambda}\right)_r^s$  e l'altro invece che non vi dipende ed è dunque invariante per trasformazioni di Lorentz:

$$\tilde{M}^{\mu\nu\lambda} = \tilde{L}^{\mu\nu\lambda} + \tilde{S}^{\mu\nu\lambda}$$

$$\tilde{L}^{\mu\nu\lambda} = x^\nu \tilde{T}^{\mu\lambda} - x^\lambda \tilde{T}^{\mu\nu} \quad \tilde{S}^{\mu\nu\lambda} = \left(\Sigma^{\nu\lambda}\right)_r^s \phi_s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)} \quad (2.4)$$

$\tilde{T}^{\mu\nu}$  è associato alle traslazioni infinitesime dalla (2.3a), dunque rappresenterà il tensore energia-impulso canonico della teoria, mentre  $\tilde{M}^{\mu\nu\lambda}$  è associato alle rotazioni infinitesime e sarà quindi il tensore momento angolare canonico. Appare evidente allora che il tensore momento angolare si scompone in due tensori: uno di spin  $\tilde{S}^{\mu\nu\lambda}$ , che dipende dal fatto che il campo non è invariante per trasformazioni di Lorentz; uno orbitale  $\tilde{L}^{\mu\nu\lambda}$  che invece dipende dalla parte del campo che è invariante per Lorentz. Ad esempio, un campo scalare  $\Phi$  è invariante per trasformazioni di Lorentz ed avrà dunque  $\tilde{S}^{\mu\nu\lambda} = 0$ , dato che la variazione  $\delta\Phi$  dell'equazione (2.1) è nulla.

In generale è possibile costruire attraverso un processo di simmetrizzazione un  $T^{\mu\nu}$  simmetrico che sia conservato e generi le stesse correnti di  $\tilde{T}^{\mu\nu}$ ; da questo si può poi derivare un  $M^{\mu\nu\lambda}$  che sia pure conservato e generi le stesse correnti di  $\tilde{M}^{\mu\nu\lambda}$ . Per fare ciò ci si focalizza sul fatto che il calcolo delle cariche conservate coinvolge solamente gli integrali spaziali di alcune componenti di questi tensori; si dimostra allora che le componenti non gauge-invarianti dei due tensori canonici si riducono a termini di bordo e quindi non generano quantità apprezzabili se i campi si annullano all'infinito. In questo modo si ottengono due tensori simmetrici che non dipendono esplicitamente dal campo o dalle sue derivate, e che dunque saranno invarianti di gauge nel caso del campo elettromagnetico.

Passiamo ora al campo elettromagnetico e vediamo  $\tilde{T}^{\mu\nu}$  e  $\tilde{M}^{\mu\nu\lambda}$  per il campo  $A^\mu$ . La lagrangiana del campo elettromagnetico libero è:

$$\tilde{\mathcal{L}} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (E^2 - B^2) \quad (2.5)$$

ove  $F^{\mu\nu}$  è il campo elettromagnetico in forma covariante:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (2.6)$$

L'azione elettromagnetica è invariante per simmetrie di Poincarè, quindi applicando il teorema di Nöther al campo elettromagnetico si ottengono le due quantità tensoriali conservate  $\tilde{T}^{\mu\nu}$  e  $\tilde{M}^{\mu\alpha\beta}$ ; è noto che per i campi vettoriali vale

$$\left(\Sigma^{\alpha\beta}\right)_r^s = \delta^\alpha_r g^{\beta s} - \delta^\beta_r g^{\alpha s} \quad (2.7)$$

dunque esplicitando tale quantità e il campo  $A^\mu$  nelle (2.3a) si ottengono: Il tensore energia-impulso canonico

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\gamma F^\nu{}_\gamma - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \quad (2.8)$$

e il tensore momento angolare canonico

$$\begin{aligned} \tilde{M}^{\mu\alpha\beta} &= \tilde{L}^{\mu\alpha\beta} + \tilde{S}^{\mu\alpha\beta} \\ \tilde{L}^{\mu\alpha\beta} &= r^\alpha \tilde{T}^{\mu\beta} - r^\beta \tilde{T}^{\mu\alpha} \quad \tilde{S}^{\mu\alpha\beta} = F^{\alpha\mu} A^\beta - F^{\beta\mu} A^\alpha \end{aligned} \quad (2.9)$$

ove  $r^\mu = (t, \mathbf{r})$ ,  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  è il vettore posizione.

Vale ovviamente  $\partial_\mu \tilde{T}^{\mu\nu} = 0$ ,  $\partial_\mu \tilde{M}^{\mu\alpha\beta} = 0$ . Si noti che  $\tilde{M}^{\mu\alpha\beta}$  è stato scomposto nelle parti orbitale e di spin, le quali sono chiaramente non gauge invarianti.

I due tensori conservati sono evidentemente non simmetrici, tuttavia possono essere rielaborati attraverso il processo di simmetrizzazione accenato sopra. Simmetrizzando  $\tilde{T}^{\mu\nu}$  si ottiene il tensore energia impulso equivalente  $T^{\mu\nu}$ , che genera le stesse correnti ed è anch'esso conservato:

$$T^{\mu\nu} = F^\mu{}_\alpha F^{\alpha\nu} + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}; \quad (2.10)$$

da questo si ottiene il tensore momento angolare

$$M^{\mu\alpha\beta} = r^\alpha T^{\mu\beta} - r^\beta T^{\mu\alpha}. \quad (2.11)$$

Quest'ultimo pure genera le stesse correnti di  $\tilde{M}^{\mu\alpha\beta}$  e si conserva; è inoltre antisimmetrico negli indici  $[\alpha, \beta]$ . Risulta evidente che nel processo di simmetrizzazione è andata persa la parte del momento angolare non gauge invariante, ed è rimasto un tensore  $M^{\mu\alpha\beta}$  invariante di gauge.

## Il momento angolare del campo elettromagnetico

Entrambi i tensori  $M^{\mu\alpha\beta}$  e  $\tilde{M}^{\mu\alpha\beta}$  generano 6 correnti conservate, 3 delle quali corrispondono idealmente alle componenti spaziali del momento angolare; tuttavia, ricavare il vettore  $\mathbf{J}$  dall'uno o dall'altro tensore può portare a due risultati differenti. Questo è l'apparente paradosso teorico da cui nasce il nostro interesse per la questione, quindi vediamo in dettaglio questo fatto, partendo dal tensore  $J^{\alpha\beta}$  che corrisponde alla forma covariante delle 6 correnti conservate del tensore  $M^{\mu\alpha\beta}$ :

$$J^{\alpha\beta} = \int d^3r M^{0\alpha\beta} = \int d^3r (r^\alpha T^{0\beta} - r^\beta T^{0\alpha}); \quad (2.12)$$

si costruisce il vettore  $\mathbf{J}$  a partire dalle componenti spaziali di  $J^{\alpha\beta}$ :

$$J^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} J^{jk}. \quad (2.13)$$

Questo corrisponde al  $\mathbf{J}$  classico del campo elettromagnetico, infatti:

$$J^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} J^{jk} = \varepsilon^{ijk} \int d^3r r^j T^{0k} = \int d^3r (\mathbf{r} \times \mathbf{S})^i$$

ove  $\mathbf{S} = T^{0k}$  è il vettore di Poynting. Si ricorda che classicamente vale

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (2.14)$$

che è proprio ciò che si ottiene se si considera l'equazione (2.8) e se ne prendono le componenti  $T^{0k}$ .

Dalla (2.13) si può calcolare il momento angolare trasportato dal campo elettromagnetico. Ad esempio, si può calcolare il  $\mathbf{J}$  trasportato da un'onda elettromagnetica piana, rappresentata dal campo:

$$A^\mu(r^\mu) = \varepsilon^\mu(\mathbf{k}) e^{ik \cdot r} + c.c. \quad (2.15)$$

ove  $\mathbf{k}$  è il vettore d'onda e  $\varepsilon^\mu$  è il quadrivettore di polarizzazione.

Si trova il  $T^{\mu\nu}$  per il campo da inserire nella (2.11):

$$T^{\mu\nu} = F^\mu{}_\alpha F^{\alpha\nu} + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = F^\mu{}_\alpha F^{\alpha\nu},$$

essendo il secondo termine  $F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = \text{const.} (|\mathbf{E}|^2 - |\mathbf{B}|^2) = 0$  poiché  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  sono uguali in modulo per le onde che stiamo trattando. Introducendo il quadrivettore  $n^\mu = \frac{k^\mu}{|\mathbf{k}|}$  e facendo uso delle relazioni delle onde (riportate in Appendice A) il tensore energia impulso diventa:

$$F^\mu{}_\alpha F^{\alpha\nu} = (n^\mu \dot{A}_\alpha - n_\alpha \dot{A}^\mu) (n^\alpha \dot{A}^\nu - n^\nu \dot{A}^\alpha) = -n^\mu n^\nu \dot{A}^\alpha \dot{A}_\alpha = n^\mu n^\nu (\delta^{ij} - n^i n^j) \dot{A}^i \dot{A}^j.$$

Fissando ora la direzione  $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$  e noto il fatto che  $E^i = -(\delta^{ij} - n^i n^j) \dot{A}^j$  per le relazioni delle onde, il  $T^{\mu\nu}$  si semplifica:

$$T^{\mu\nu} = n^\mu n^\nu |\mathbf{E}|^2 = n^\mu n^\nu W$$

ove  $W$  è la densità di energia del campo elettromagnetico:  $W = |\mathbf{E}|^2$ .

Si inserisce allora questo risultato nella (2.11) per trovare  $J^{\nu\lambda}$  e successivamente  $J^i$ :

$$J^{\nu\lambda} = \int d^3r M^{0\nu\lambda} = \int d^3r W (r^\nu n^\lambda - r^\lambda n^\nu),$$

$$J^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} J^{jk} = \int d^3r W (\varepsilon^{ijk} r^j n^k),$$

Valutando le singole componenti di  $\mathbf{J}$ , è facile verificare che sono tutte e tre nulle. Infatti integrando su volumi simmetrici rispetto all'origine delle coordinate, e ricordando che  $n_z$  è l'unica componente non nulla di  $\mathbf{n}$  risulta

$$J_x = \int d^3r W (y n_z - z n_y) = \int d^3r W y = 0$$

$$J_y = \int d^3r W (z n_x - x n_z) = - \int d^3r W x = 0$$

$$J_z = \int d^3r W \varepsilon^{3jk} r^j n^k = \int d^3r W (x n_y - y n_x) = 0.$$

Questo risultato è contraddetto da evidenze sperimentali, secondo le quali un campo del tipo (2.15) trasporta momento angolare (fintanto che la polarizzazione sia circolare o genericamente ellittica). L'unica assunzione che è stata fatta in questo conto è che i campi si annullino all'infinito, altrimenti il  $T^{\mu\nu}$  simmetrico non avrebbe validità; effettivamente le onde piane non sono nulle all'infinito, quindi è evidente che l'errore è proprio nell'utilizzo del tensore energia-impulso simmetrico, il quale in questo caso non genera le stesse correnti del tensore energia

impulso canonico derivato col teorema di Nöther.

Si riprende allora il tensore  $\tilde{M}^{\mu\alpha\beta}$ , anche se esso non è invariante di gauge, e si ripete esattamente il procedimento fatto nelle equazioni (2.12) e (2.13) sostituendo  $\tilde{M}^{\mu\alpha\beta}$  a  $M^{\mu\alpha\beta}$  e  $\tilde{T}^{\mu\nu}$  a  $T^{\mu\nu}$ :

$$\begin{aligned}\tilde{J}^i &= \frac{1}{2} \int d^3r \varepsilon^{ijk} \tilde{M}^{0jk} \\ &= \frac{1}{2} \int d^3r \varepsilon^{ijk} \left[ r^j \tilde{T}^{0k} - r^k \tilde{T}^{0j} + F^{j0} A^k - F^{k0} A^j \right];\end{aligned}$$

le prime due componenti all'interno dell'integrale appartengono a  $\tilde{L}^{0jk}$ , le seconde due a  $\tilde{S}^{0jk}$ . Scomponendo già l'integrale secondo questa divisione risulta

$$\tilde{J}_L^i = \frac{1}{2} \int d^3r \tilde{L}^{0jk} = \int d^3r \varepsilon^{ijk} r^j \tilde{T}^{0k} = \int d^3r \varepsilon^{ijk} r^j \left( \partial^k A^\gamma F^{0\gamma} - \frac{1}{4} g^{k0} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right).$$

Il secondo termine sotto l'integrale è nullo, essendo  $g^{k0} = 0$ . L'integrando dipende evidentemente dalla gauge; fissiamo allora una gauge conveniente nella quale svolgere il conto: la **gauge di Coulomb**, per la quale  $A^0 = 0$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ . Vedremo nella prossima sezione che questa scelta è giustificata, infatti è proprio in tale gauge che le quantità trovate corrispondono effettivamente ai momenti angolari orbitale e di spin. L'espressione si semplifica così ulteriormente:

$$\tilde{J}_L^i = \int d^3r \varepsilon^{ijk} r^j \partial^k A^\gamma F^{0\gamma} = - \int d^3r \varepsilon^{ijk} r^j \partial^k A^l F^{0l} = \int d^3r \varepsilon^{ijk} r^j \partial^k A^l E^l;$$

e il termine relativo a  $\tilde{S}^{0jk}$  risulta:

$$\tilde{J}_S^i = \frac{1}{2} \int d^3r \tilde{S}^{0jk} = \int d^3r \varepsilon^{ijk} F^{j0} A^k = \int d^3r \varepsilon^{ijk} E^j A^k.$$

Dunque ricavando le componenti spaziali del momento angolare dal tensore momento angolare canonico si ha che (tralasciando ora le tilde):

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_L + \mathbf{J}_S \quad (2.16)$$

$$\mathbf{J}_L = \int d^3r E_i (\mathbf{r} \times \nabla) A_i \quad (2.17) \quad \mathbf{J}_S = \int d^3r \mathbf{E} \times \mathbf{A} \quad (2.18)$$

Ovvero, il momento angolare  $\mathbf{J}$  è naturalmente decomposto in due parti, una che consideriamo orbitale  $\mathbf{J}_L$  e una di spin  $\mathbf{J}_S$ . La loro espressione tuttavia dipende dalla scelta della gauge; scegliendo la gauge di Coulomb risulta che le due componenti separate possono essere scritte come sopra. Si noti che le due componenti per i campi liberi così scritte si conservano nel tempo:

**Dimostrazione:** Per dimostrare che  $\mathbf{J}_L$  e  $\mathbf{J}_S$  si conservano separatamente basta dimostrare che se ne conservi uno dei due, la conservazione dell'altro discenderà dal fatto che il  $\mathbf{J}$  totale si conserva per il teorema di Nöther. Dimostriamo allora che si conserva la componente più semplice, ovvero  $\mathbf{J}_S$ :

$$\partial_t \mathbf{J}_S = \int d^3r \partial_t [\mathbf{E} \times \mathbf{A}] = \int d^3r [\partial_t \mathbf{E} \times \mathbf{A} + \mathbf{E} \times \partial_t \mathbf{A}].$$

Vale la gauge di Coulomb, dunque il campo elettrico sarà  $\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A}$ ; questo implica che il secondo termine dell'espressione è nullo essendo  $\mathbf{E} \times \mathbf{E} = 0$ . Rielaboriamo ora il primo termine facendo uso delle equazioni di Maxwell nel vuoto ed esprimendo il campo magnetico come  $B_m = \varepsilon_{mpq} \partial_p A_q$ :

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{E} &= \nabla \times \mathbf{B} \\ \partial_t E_j &= (\nabla \times \mathbf{B})_j = -\varepsilon_{jlm} \varepsilon_{mpq} \partial_l \partial_p A_q = -(\delta_{jp} \delta_{lq} - \delta_{jq} \delta_{lp}) \partial_l \partial_p A_q = \partial_l \partial_l A_j,\end{aligned}$$

Dunque resta

$$\partial_t J_S = \int d^3r \varepsilon_{ijk} \partial_l \partial_l A_j A_k,$$

che integrando per parti diventa

$$-\partial_t J_S = \int d^3r \varepsilon_{ijk} \partial_l A_j \partial_l A_k = 0$$

per simmetria. Questo dimostra che  $J_S$  si conserva nel tempo, e così anche  $J_L$ .

□

Appare evidente che per capire quale sia la formulazione corretta ed il significato fisico di  $J_L$  e  $J_S$  è necessario indagare oltre; cerchiamo allora un modo per interpretare e studiare queste quantità che giustifichi le formule (2.17) e (2.18) e in particolare la scelta della gauge di Coulomb.

## Capitolo 3

# Scomposizione quantomeccanica del momento angolare

Dimostriamo in questa sezione che la scomposizione espressa dalle (2.17) e (2.18) discende dalla descrizione quanto-meccanica dei fotoni nella rappresentazione dei momenti, seguendo il ragionamento di [13]. In particolare, mostriamo che il valore di aspettazione dell'operatore momento angolare  $\hat{J}$  si scompone naturalmente in parte orbitale e di spin, e che queste scelta la gauge di Coulomb corrispondono proprio a  $J_L$  e  $J_S$  scritte sopra.

Per fare ciò, prima passeremo allo spazio dei momenti trasformando con Fourier il campo elettrico ed il potenziale vettore, così da poter scrivere  $J_L$  e  $J_S$  come integrali nello spazio dei momenti. Descriveremo poi i fotoni in questo spazio, e troveremo una formulazione per il  $J$  totale che sia composta da due parti. Infine concilieremo la descrizione dei fotoni con quella del campo elettromagnetico nello spazio dei momenti, identificando la funzione d'onda del fotone con il vettore del campo complesso.

### Passaggio allo spazio dei momenti

Si rielaborano innanzi tutto le (2.17) e (2.18) per esprimerle come integrali sullo spazio dei momenti di funzioni che dipendono dalle componenti di Fourier del campo  $E$ . Si scrive allora la trasformata di Fourier del campo  $E$  e del potenziale vettore  $A$ :

$$E(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \left[ E(\mathbf{k}) e^{-i\omega_k t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + c.c. \right], \quad (3.1)$$

$$A(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \left[ A(\mathbf{k}) e^{-i\omega_k t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + c.c. \right]. \quad (3.2)$$

Si osserva che nella **gauge di Coulomb** il campo  $E$  dipende dal potenziale vettore  $A$  secondo l'espressione

$$E_i = F_{i0} = \partial_i A_0 - \partial_0 A_i = -\partial_0 A_i,$$

dunque vale la seguente relazione tra le componenti di Fourier dei due campi:

$$E(\mathbf{k}) = i\omega_k A(\mathbf{k}) \implies A(\mathbf{k}) = \frac{E(\mathbf{k})}{i\omega_k}. \quad (3.3)$$

Sostituendo questa nelle espressioni per  $J_L$  e  $J_S$  si ottiene

$$J_L = \int d^3r E_i (\mathbf{r} \times \nabla)_i A_i = -2i \int \frac{d^3k}{\omega_k} E_i^*(\mathbf{k}) (\mathbf{k} \times \nabla_k)_i E_i(\mathbf{k}), \quad (3.4)$$

$$\mathbf{J}_S = \int d^3r \mathbf{E} \times \mathbf{A} = -2i \int \frac{d^3k}{\omega_k} \mathbf{E}^*(\mathbf{k}) \times \mathbf{E}(\mathbf{k}). \quad (3.5)$$

Questo risultato si ottiene immediatamente esplicitando i campi decomposti (3.1) e (3.2) nelle (2.17) e (2.18) e ricordando che vale

$$\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3r e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}}.$$

## Descrizione quantomeccanica dei fotoni

Bisogna definire come agiscono nello spazio dei momenti i vari operatori che rappresentano le quantità fisiche. Per descrivere i fotoni in maniera consistente è necessario impostare una teoria che tenga conto della loro natura relativistica; a noi basterà una teoria approssimata, in cui si considera conservato il numero di fotoni  $N$  – non utilizzeremo quindi la elettrodinamica quantistica, nella quale si possono creare e distruggere fotoni. Impostiamo così una teoria relativistica definendo gli operatori che derivano dalle 10 correnti conservate che generano il gruppo di Poincaré, contenute nei generatori del gruppo di Lorentz  $J_{\mu\nu}$  (6 correnti) e nei generatori delle traslazioni spazio-temporali  $P_\mu$  (4 correnti); gli operatori saranno:

1. L'operatore energia  $\hat{H}$ , che deriva dal generatore delle traslazioni temporali
2. L'operatore momento  $\hat{P}$ , dai 3 generatori delle traslazioni spaziali
3. L'operatore momento angolare  $\hat{J}$ , dai 3 generatori delle rotazioni nello spazio
4. L'operatore boost  $\hat{K}$ , dai 3 generatori dei boost di Lorentz.

$J_{\mu\nu}$  e  $P_\mu$  seguono le regole di commutazione dell'algebra del gruppo di Poincaré

$$[J_{\mu\nu}, J_{\alpha\beta}] = g_{\mu\alpha}J_{\nu\beta} \pm g_{\nu\alpha}J_{\mu\beta} \quad [J_{\mu\nu}, P_\alpha] = g_{\mu\alpha}P_\nu, \quad (3.6)$$

da cui derivano le regole di commutazione per gli operatori sopracitati; riportiamo quelle che ci saranno utili:

$$[\hat{H}, \hat{J}_i] = 0 \quad [\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{J}_k. \quad (3.7)$$

Definito un vettore d'onda  $\mathbf{k}$  con versore  $\mathbf{n}_k$  l'operatore energia e l'operatore momento agiranno nel seguente modo sulle corrispondenti autofunzioni:

$$\hat{H} = \hbar\omega_k, \quad \hat{P} = \hbar\mathbf{k}; \quad (3.8)$$

essendo i fotoni particelle prive di massa, varrà in questo caso che  $\omega_k = |\mathbf{k}|$ .

L'oggetto di interesse in questa sezione è l'operatore  $\hat{J}$ , che vogliamo trovare e descrivere; vale che  $\hat{J}$  agisce nello spazio dei momenti come

$$\hat{J} = i\hbar\mathbf{D} \times \mathbf{k} + \hbar\hat{\chi}\mathbf{n}_k \quad (3.9)$$

ove si introducono l'operatore lineare unitario elicità  $\hat{\chi}$  con spettro  $\pm 1$ , e la derivata covariante

$$\mathbf{D} = \nabla_{\mathbf{k}} - i\hat{\chi}\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k}) \quad (3.10)$$



la quale dipende dal vettore  $\alpha(\mathbf{k})$  che è fissato a meno di una trasformazione di gauge. Vediamo di definire meglio la derivata covariante  $D$  poiché alcune sue proprietà saranno utili in seguito per descrivere l'operatore  $\hat{J}$ :

Vedremo che perché per il  $\hat{J}$  definito dalla (3.9) valgano le regole di commutazione (3.7) deve valere la seguente relazione per  $D$ :

$$[D_i, D_j] = i\hat{\chi}\epsilon_{ijl} \frac{n_l}{|\mathbf{k}|^2}. \quad (3.11)$$

Come anticipato, dalle regole di commutazione per  $D$  emerge una condizione sulle derivate del vettore  $\alpha(\mathbf{k})$  che dimostriamo brevemente in Appendice C.3:

$$\frac{\partial}{\partial k_i}\alpha_j - \frac{\partial}{\partial k_j}\alpha_i = -\epsilon_{ijl} \frac{n_l}{|\mathbf{k}|^2} \implies \nabla_k \times \alpha(\mathbf{k}) = -\frac{n_l}{|\mathbf{k}|^2}. \quad (3.12)$$

Data questa proprietà di  $\alpha(\mathbf{k})$  appare evidente che questo vettore è definito a meno di una divergenza  $\frac{\partial}{\partial k_i}\varphi$ , e dunque è fissato a meno di una trasformazione di gauge.

Mostriamo ora che vale la regola di commutazione (3.7) per  $\hat{J}$ :

**Dimostrazione:** Si mostra che l'operatore  $\hat{J}$  così come è presentato nella (3.9) obbedisce alla regola di commutazione dei momenti angolari, ovvero si verifica che vale

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{J}_k.$$

Posto  $\hbar=1$  per comodità, procediamo col calcolo del commutatore tenendo presente che la derivata  $D$  agisce come una derivata sia sulle funzioni che sui vettori numerici. Infatti vale

$$D_j k_i = \frac{\partial k_i}{\partial k_j}$$

e dunque

$$\begin{aligned} D_j(k_i f) &= \frac{\partial}{\partial k_j}(k_i f) - i k_i \hat{\chi} \alpha_j f \\ &= \frac{\partial k_i}{\partial k_j} f + k_i D_j f \\ &= D_j k_i f + k_i D_j f; \end{aligned}$$

ovvero, vale la regola di derivazione di Leibnitz.

Svolgiamo allora il conto termine per termine<sup>1</sup>:

$$[J_i, J_j] = -\epsilon_{iab}\epsilon_{jlm} [k_b D_a, k_m D_l] + (i\epsilon_{iab} [k_b D_a, n_j] \hat{\chi} - (i \leftrightarrow j))$$

elaboriamo il primo termine a destra:

$$\begin{aligned} [k_b D_a, k_m D_l] &= k_b k_m [D_a, D_l] + k_b [D_a, k_m] D_l + D_a [k_b, D_l] k_m \\ &= k_b k_m i \frac{\epsilon_{als} n_s}{|\mathbf{k}|^2} \hat{\chi} + D_a (k_b D_l) k_m - D_a (D_l k_b) k_m + k_b (D_a k_m) D_l - k_b (k_m D_a) D_l \\ &= k_b k_m i \frac{\epsilon_{als} n_s}{|\mathbf{k}|^2} \hat{\chi} + \delta_{am} k_b D_l - \delta_{lb} k_m D_a \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Per semplicità il versore  $\mathbf{n}_k$  sarà chiamato  $\mathbf{n}$  per non confondere gli indici col pedice  $k$ .

e il secondo termine:

$$\begin{aligned}
 [k_b D_a, n_j] &= k_b (D_a n_j) \\
 &= k_b \frac{\partial}{\partial k_a} \left( \frac{k_j}{|\mathbf{k}|} \right) \\
 &= \frac{k_b}{|\mathbf{k}|} (\delta_{aj} - n_a n_j)
 \end{aligned}$$

il termine  $n_a n_j$  si semplifica con il suo corrispettivo nella parte ( $i \leftrightarrow j$ ); ammettendo che valga la regola di commutazione per  $\mathbf{D}$  (3.11), resta:

$$\begin{aligned}
 [J_i, J_j] &= -\varepsilon_{jlm} (\delta_{is} \delta_{bl} - \delta_{il} \delta_{bs}) k_b k_m i \frac{n_s}{|\mathbf{k}|^2} \hat{\chi} + (\delta_{ij} \delta_{bl} - \delta_{il} \delta_{bj}) k_b D_l + \\
 &\quad - (\delta_{ij} \delta_{am} - \delta_{im} \delta_{aj}) k_m D_a + \left( i \varepsilon_{ijb} \frac{k_b}{|\mathbf{k}|} \hat{\chi} - (i \leftrightarrow j) \right) \\
 &= + i \hat{\chi} \varepsilon_{jim} n_m + k_j D_i - k_i D_j + \delta_{ij} (k \cdot D - k \cdot D) + 2 (i \varepsilon_{ijb} n_b \hat{\chi})
 \end{aligned}$$

sommando il primo e ultimo termine e semplificando i termini che si annullano risulta

$$[J_i, J_j] = i \varepsilon_{ijm} [n_m \hat{\chi} + (\mathbf{D} \times \mathbf{k})_m] = i \varepsilon_{ijk} J_k$$

che verifica la relazione cercata. Abbiamo inoltre verificato indirettamente che vale (3.11) se  $\hat{\mathbf{J}}$  è un momento angolare.

□

Per completezza, si riporta anche l'espressione per l'operatore di boost  $\hat{K}$  in questa rappresentazione:

$$\hat{K} = i \hbar \omega_k \mathbf{D}. \quad (3.13)$$

Gli operatori riportati nelle (3.8), (3.9), (3.13) agiranno sulle funzioni d'onda dei fotoni espresse nello spazio dei momenti  $\mathbf{f}(\mathbf{k})$ . Conviene scrivere queste funzioni d'onda nella base dell'operatore elicità  $\hat{\chi}$ , ovvero

$$\mathbf{f}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} f_+(\mathbf{k}) \\ f_-(\mathbf{k}) \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

ove  $f_+(\mathbf{k})$  è l'autofunzione di  $\hat{\chi}$  relativa all'autovalore  $+1$  e corrisponde alla polarizzazione circolare levogira, mentre  $f_-(\mathbf{k})$  è relativa all'autovalore  $-1$  e corrisponde alla polarizzazione circolare destrogira.

## Descrizione classica del campo elettromagnetico e principio di corrispondenza

A questo punto si espone la descrizione maxwelliana del campo elettromagnetico e la si concilia con quella quantistica appena esposta avvalendosi del principio di corrispondenza, ovvero considerando la visione classica come la sintesi di un sistema a molti fotoni; questo passaggio si basa sull'ipotesi che il campo classico corrisponda alla funzione d'onda di tale sistema (vedremo in che termini). Precisamente, si dimostra che per il momento angolare classico  $\mathbf{J}$  vale  $\mathbf{J} = N \langle \mathbf{f}(\mathbf{k}) | \hat{\mathbf{J}} | \mathbf{f}(\mathbf{k}) \rangle$ , ove  $N$  è il numero di fotoni del sistema,  $\mathbf{f}(\mathbf{k})$  è la funzione d'onda di ciascun fotone e  $\hat{\mathbf{J}}$  è l'operatore momento angolare descritto nella sezione precedente.

Scegliamo innanzi tutto di trattare i campi nel sistema di Gauss razionalizzato, in cui le unità di misura dei campi elettrici e magnetici sono tali da considerare la costante dielettrica  $\epsilon_0 = 1$  e poniamo  $c = 1$  per semplicità.

Conviene esprimere il campo tramite un unico vettore complesso  $\mathbf{F}$ , chiamato vettore di Riemann-Silberstein:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{E} + i\mathbf{B}); \quad (3.15)$$

le equazioni di Maxwell nel vuoto per  $\mathbf{F}$  si riducono alle due relazioni

$$\partial_t \mathbf{F}(t, \mathbf{r}) = -i \nabla \times \mathbf{F}(t, \mathbf{r}) \quad \nabla \cdot \mathbf{F}(t, \mathbf{r}) = 0. \quad (3.16)$$

Si introducono ora le quantità classiche che corrispondono alle 10 correnti conservate che generano le trasformazioni di Poincaré scritte a partire da  $\mathbf{F}(t, \mathbf{r})$ . Queste saranno le corrispettive classiche degli operatori  $\hat{H}$ ,  $\hat{\mathbf{P}}$ ,  $\hat{\mathbf{J}}$ ,  $\hat{\mathbf{K}}$  esposti in precedenza. Come già spiegato nella prima parte di questa tesina, queste quantità saranno integrali su tutto lo spazio delle rispettive densità costruite a partire dal tensore energia-impulso del campo elettromagnetico  $T^{\mu\nu}$ . Esprimendo le varie densità tramite il vettore  $\mathbf{F}(t, \mathbf{r})$  risulta:

$$H = \int d^3r \mathbf{F}^* \cdot \mathbf{F} \quad (3.17a)$$

$$\mathbf{P} = \frac{1}{i} \int d^3r \mathbf{F}^* \times \mathbf{F} \quad (3.17b)$$

$$\mathbf{J} = \frac{1}{i} \int d^3r \mathbf{r} \times (\mathbf{F}^* \times \mathbf{F}) \quad (3.17c)$$

$$\mathbf{K} = \int d^3r \mathbf{r} (\mathbf{F}^* \cdot \mathbf{F}) \quad (3.17d)$$

Per conciliare queste quantità classiche con gli operatori quantistici bisogna passare nuovamente allo spazio dei momenti. Per fare ciò ci si avvale del fatto che ogni soluzione delle equazioni di Maxwell (3.16) può essere scomposta in onde piane con frequenze positive e negative; ovvero ogni soluzione  $\mathbf{F}(t, \mathbf{r})$  ha una rappresentazione di Fourier

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{r}) = \sqrt{N} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3/2} \mathbf{e}(\mathbf{k}) \left[ f_+(\mathbf{k}) e^{-i\omega_k t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + f_-^*(\mathbf{k}) e^{+i\omega_k t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \right] \quad (3.18)$$

ove  $\mathbf{e}(\mathbf{k})$  è il vettore polarizzazione complesso e  $\sqrt{N}$  è per ora un coefficiente di normalizzazione. I coefficienti di Fourier  $f_{\pm}$  di  $\mathbf{F}$  corrispondono alle due componenti di  $\mathbf{f}(\mathbf{k})$  introdotte nella (3.14); in questa corrispondenza sta il passaggio dalla descrizione quantistica a quella classica.

**Proprietà di  $e(\mathbf{k})$ :** Prima di andare avanti è necessario definire bene  $e(\mathbf{k})$ , dato che le sue proprietà saranno essenziali per le verifiche che faremo in seguito. Valgono le seguenti equivalenze per  $e(\mathbf{k})$ :

$$e(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} [l_1(\mathbf{k}) + il_2(\mathbf{k})] \quad \text{con } l_1, l_2 \text{ funzioni reali di } \mathbf{k}, \quad (3.19a)$$

$$\mathbf{n}_k \times e(\mathbf{k}) = -ie(\mathbf{k}) \quad e(\mathbf{k}) \times e(\mathbf{k}) = 0 \quad (3.19b)$$

$$e(\mathbf{k}) \cdot e(\mathbf{k}) = 0 \quad e^*(\mathbf{k}) \cdot e(\mathbf{k}) = 1 \quad (3.19c)$$

$$e^*(\mathbf{k}) \times e(\mathbf{k}) = i\mathbf{n}_k \quad e^*(\mathbf{k}) \cdot e(-\mathbf{k}) = 0 \quad (3.19d)$$

$$e(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{n}_k = 0 \quad e^*(\mathbf{k}) \times e(-\mathbf{k}) = 0; \quad (3.19e)$$

Tutte queste proprietà derivano da un'unica uguaglianza:

$$e_i^*(\mathbf{k})e_j(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \left( \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijl} \frac{k_l}{|\mathbf{k}|} \right). \quad (3.19f)$$

L'identificazione dei coefficienti di Fourier di  $\mathbf{F}(t, \mathbf{r})$  nella (3.18) con le componenti della funzione d'onda del fotone (3.14) non è ovvia; è proprio in questa identificazione che sta il passaggio dal quadro classico a quello quantistico. Presupponendo questa corrispondenza si verifica che sostituendo la scomposizione (3.18) in ciascuna delle espressioni in (3.17) risulta proprio

$$\begin{aligned} H &= N \langle \mathbf{f}(\mathbf{k}) | \hat{H} | \mathbf{f}(\mathbf{k}) \rangle & \mathbf{P} &= N \langle \mathbf{f}(\mathbf{k}) | \hat{\mathbf{P}} | \mathbf{f}(\mathbf{k}) \rangle \\ \mathbf{J} &= N \langle \mathbf{f}(\mathbf{k}) | \hat{\mathbf{J}} | \mathbf{f}(\mathbf{k}) \rangle & \mathbf{K} &= N \langle \mathbf{f}(\mathbf{k}) | \hat{\mathbf{K}} | \mathbf{f}(\mathbf{k}) \rangle \end{aligned} \quad (3.20)$$

ove  $\mathbf{f}(\mathbf{k}) = (f_+(\mathbf{k}), f_-(\mathbf{k}))$ . Questo significa che sostituendo la scomposizione in onde piane di  $\mathbf{F}(t, \mathbf{r})$  nel calcolo delle quantità classiche del campo elettromagnetico si ritrovano i valori di aspettazione degli operatori quantistici che descrivono i fotoni nella rappresentazione dei momenti, se si ammette che  $N$  sia il numero di fotoni del sistema e  $\mathbf{f}(\mathbf{k})$  corrisponda alla funzione d'onda del fotone scomposta nella base dell'operatore  $\hat{\chi}$  (3.14).

Vediamo in dettaglio la dimostrazione di questa corrispondenza per il momento angolare  $\mathbf{J}$ , dato che è il fulcro del nostro interesse:

**Dimostrazione di  $\mathbf{J} = N \langle \mathbf{f}(\mathbf{k}) | \hat{\mathbf{J}} | \mathbf{f}(\mathbf{k}) \rangle$  :**

$$\mathbf{J} = \frac{1}{i} \int d^3r \, \mathbf{r} \times (\mathbf{F}^* \times \mathbf{F})$$

Inseriamo nell'espressione la scomposizione della funzione  $\mathbf{F}$ :

$$\mathbf{J} = \frac{N}{i(2\pi)^3} \int d^3r \, \mathbf{r} \times \int d^3k \int d^3k' \, e^*(\mathbf{k}) \times e(\mathbf{k}') \, c^*(\mathbf{k}) c(\mathbf{k}')$$

ove vale

$$c(\mathbf{k}) = f_+(\mathbf{k}) e^{-i\omega_k t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + f_-^*(\mathbf{k}) e^{+i\omega_k t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}.$$

Valutiamo  $\mathbf{J}$  per componenti:

$$J_l = -N \varepsilon_{lmi} \varepsilon_{ijk} \int d^3k \int d^3k' \frac{\partial \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')}{\partial k_m} \left[ f_+(\mathbf{k}) f_+^*(\mathbf{k}') e^{i(\omega - \omega')t} - f_-(\mathbf{k}') f_-^*(\mathbf{k}) e^{i(\omega - \omega')t} \right] + \\ + \frac{\partial \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}')}{\partial k_m} \left[ f_+(\mathbf{k}) f_-(\mathbf{k}') e^{i(\omega + \omega')t} - f_+^*(\mathbf{k}') f_-^*(\mathbf{k}) e^{i(\omega + \omega')t} \right] e_j^*(\mathbf{k}) e_k(\mathbf{k}') \quad (3.21)$$

avendo sostituito

$$\frac{\partial \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')}{\partial k_m} = \int d^3r \, r_m e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}}.$$

Considerando  $\mathbf{J}$  composto dalla somma di 4 integrali doppi, prendiamo in considerazione il primo e integriamo per parti:

$$1) = N \varepsilon_{lmi} \varepsilon_{ijk} \int d^3k \int d^3k' \, \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \left[ f_+^* \frac{\partial f_+}{\partial k_m} e_j^* e_k' + f_+ f_+^* \frac{\partial e_j^*}{\partial k_m} e_k' \right] e^{i(\omega - \omega')t} + \\ + \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') f_+^* f_+ e_j^* e_k' \left( it \frac{\partial \omega}{\partial k_m} e^{i(\omega - \omega')t} \right) \\ = N \varepsilon_{lmi} \varepsilon_{ijk} \int d^3k \left[ f_+^* \frac{\partial f_+}{\partial k_m} e_j^* e_k + f_+ f_+^* \frac{\partial e_j^*}{\partial k_m} e_k + f_+ f_+^* e_j^* e_k \left( it \frac{\partial \omega}{\partial k_m} \right) \right].$$

Sappiamo che valgono le relazioni

$$\varepsilon_{ijk} n_j e_k = -i e_i, \quad \varepsilon_{ijk} e_j^* e_k = i n_i, \quad \frac{\partial e_j}{\partial k_m} = -\frac{e_m n_j}{\omega} - i \alpha_m e_j^2, \quad \nabla_k \omega = \frac{\mathbf{k}}{\omega} \quad (3.22)$$

dalle (3.19), dunque il primo termine all'interno dell'integrale 1) (portandovi dentro i tensori di Levi-Civita) restituisce

$$f_+^* \cdot \left( \varepsilon_{lmi} \frac{\partial f_+}{\partial k_m} i n_i \right) \rightarrow f_+^* \cdot i (\nabla_k \times \mathbf{n}_k) f_+;$$

Il secondo:

$$|f_+|^2 \left( -\frac{e_m^*}{\omega} \varepsilon_{ijk} n_j e_k + i \alpha_m \varepsilon_{ijk} e_j^* e_k \right) \rightarrow f_+^* \cdot \left( \frac{\mathbf{n}_k}{\omega} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{n}_k \right) f_+;$$

Il terzo è nullo poiché contiene il prodotto esterno fra vettori paralleli:

$$\int d^3k |f_+|^2 t (\mathbf{n}_k \times \nabla_k \omega) = \int d^3k |f_+|^2 \frac{t}{\omega} (\mathbf{n}_k \times \mathbf{k}) = 0.$$

Dunque

$$1) = N \int \frac{d^3k}{\hbar \omega} f_+^* \cdot \left[ i \hbar (\vec{\nabla}_k \times \mathbf{k} - i \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{k}) + \hbar \mathbf{n}_k \right] f_+.$$

Il termine 2) della (3.21) produrrà un risultato del tutto analogo a questo, con i segni invertiti e con la componente  $f_-$  al posto di  $f_+$ ; allora

$$1) + 2) = N \int \frac{d^3k}{\hbar \omega} \mathbf{f}^* \cdot [i \hbar \mathbf{D} \times \mathbf{k} + \hbar \hat{\chi} \mathbf{n}_k] \mathbf{f}.$$

<sup>2</sup>Questa è una proprietà interessante da dimostrare; lo vediamo in Appendice C.2

Questo è proprio il risultato cercato; infatti il termine fra parentesi quadre è proprio l'operatore  $\hat{J}$  della (3.9), e note le regole del prodotto scalare, appare evidente che

$$1) + 2) = N < \mathbf{f}(\mathbf{k}) | \hat{J} | \mathbf{f}(\mathbf{k}) > .$$

Ci resta da dimostrare che 3) e 4) della (3.21) danno un contributo nullo, e dunque verificare che  $J = 1) + 2)$ :

$$\begin{aligned} 3) = N \varepsilon_{lmi} \varepsilon_{ijk} \int d^3k e_j^*(\mathbf{k}) e_k(-\mathbf{k}) & \left[ f_-(-\mathbf{k}) \frac{\partial f_+(\mathbf{k})}{\partial k_m} + f_+(\mathbf{k}) f_-(-\mathbf{k}) \frac{k_m}{\omega} \right] + \\ & + f_+(\mathbf{k}) f_-(-\mathbf{k}) \frac{\partial e_j^*(\mathbf{k})}{\partial k_m} e_k(-\mathbf{k}) ; \end{aligned}$$

il primo termine è nullo poiché vale  $\varepsilon_{lmi} e_m^*(\mathbf{k}) e_i(-\mathbf{k}) = 0$  per la (3.19e). Il secondo sarà nullo per lo stesso motivo:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{lmi} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial e_j^*(\mathbf{k})}{\partial k_m} e_k(-\mathbf{k}) &= -\varepsilon_{lmi} \frac{e_m^*}{\omega} \varepsilon_{ijk} n_j e_k(-\mathbf{k}) + i\alpha_m \varepsilon_{ijk} e_j^*(\mathbf{k}) e_k(-\mathbf{k}) = \\ &= -\frac{i}{\omega} \varepsilon_{lmi} e_m^*(\mathbf{k}) e_i(-\mathbf{k}) = 0 . \end{aligned}$$

Il contributo di 4) darà risultati analoghi a meno dei segni e sarà dunque nullo per gli stessi motivi.

□

Abbiamo così trovato la relazione tra descrizione classica e quantistica del campo elettromagnetico; questo risultato si basa sul fatto che il vettore di Riemann-Silberstein (3.15) in rappresentazione di Fourier è proprio la funzione d'onda del fotone.

## Scomposizione del momento angolare

Si può ora affermare che vale

$$\mathbf{J} = N \int \frac{d^3k}{\hbar\omega} \mathbf{f}^* \cdot [i\hbar \mathbf{D} \times \mathbf{k} + \hbar \hat{\chi} \mathbf{n}_k] \mathbf{f} \quad (3.23)$$

che si scompone in maniera naturale in due integrali separati:

$$\mathbf{J}_L = i\hbar N \int \frac{d^3k}{\hbar\omega} \mathbf{f}^* \cdot [\mathbf{D} \times \mathbf{k}] \mathbf{f}, \quad \mathbf{J}_S = \hbar N \int \frac{d^3k}{\hbar\omega} \mathbf{f}^* \cdot \hat{\chi} \mathbf{n}_k \mathbf{f}. \quad (3.24)$$

Resta da vedere che queste due componenti del momento angolare  $\mathbf{J}$  sono proprio le componenti orbitale e di spin  $\mathbf{J}_L$  e  $\mathbf{J}_S$  introdotte all'inizio di questa sezione (equazioni (3.4), (3.5)). Si noti che l'integrando di  $\mathbf{J}_L$  è perpendicolare alla direzione del vettore d'onda  $\mathbf{n}_k$  mentre l'integrando di  $\mathbf{J}_S$  è parallela ad essa. Questo è già un dato a favore della tesi.

Per dedurre le (3.4), (3.5) dalla (3.24) bisogna esplicitare la dipendenza delle componenti di Fourier del campo elettrico  $\mathbf{E}(\mathbf{k})$  (si veda la scomposizione (3.1)) dalle componenti di

Fourier della  $\mathbf{F}(\mathbf{k})$ . Per la (3.15),  $\mathbf{E}(\mathbf{k})$  sarà (a meno di coefficienti) la parte reale di  $\mathbf{F}(\mathbf{k})$ , quindi:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{F} + \mathbf{F}^*) .$$

Sostituendovi la scomposizione di Fourier di  $\mathbf{F}(\mathbf{k})$  (3.18) varrà

$$\mathbf{E} = \sqrt{\frac{N}{2}} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \mathbf{e}(\mathbf{k}) \left[ f_+(\mathbf{k}) e^{-i\omega_k t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + f_-^*(\mathbf{k}) e^{+i\omega_k t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + c.c. \right];$$

emerge così che

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}) = \sqrt{\frac{N}{2}} \left[ \mathbf{e}(\mathbf{k}) f_+(\mathbf{k}) + \mathbf{e}^*(\mathbf{k}) f_-^*(\mathbf{k}) \right] . \quad (3.25)$$

Esplicitando le componenti di Fourier nelle (3.4), (3.5) in questo modo, si ritrovano proprio le due espressioni di (3.24) (il conto è svolto in Appendice C.1). Le (3.4), (3.5) corrispondono l'una al momento angolare orbitale e l'altra al momento angolare di spin se si è nella gauge di Coulomb.

A questo punto risulta più chiara l'interpretazione di  $\mathbf{J}_L$  e  $\mathbf{J}_S$  del campo elettromagnetico come entità separate: sono due componenti del momento angolare  $\mathbf{J}$  di ciascun fotone e si conservano a livello microscopico poiché le due parti dell'operatore  $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{J}}_L + \hat{\mathbf{J}}_S$  commutano separatamente con l'operatore energia  $\hat{H}$  (che sarà l'hamiltoniana del sistema), nel caso del campo elettromagnetico libero. Si può dimostrare [4] che  $\mathbf{J}_L$  e  $\mathbf{J}_S$  non obbediscono individualmente all'algebra dei momenti angolari, dunque non sono operatori di momento angolare canonici; si noti in particolare che l'operatore  $\mathbf{J}_S$  è di fatto l'operatore elicità  $\hat{\chi}$  nella direzione del moto  $\mathbf{n}_k$ , cioè il momento angolare di spin del fotone coincide con la elicità che è proprio ciò che ci si aspetta in una teoria relativistica. In un sistema macroscopico di  $N$  fotoni le quantità  $\mathbf{J}_L$  e  $\mathbf{J}_S$  saranno proprio i valori di aspettazione di  $\hat{\mathbf{J}}_L$  e  $\hat{\mathbf{J}}_S$  moltiplicati per il numero  $N$ . È lecito calcolare queste quantità per il campo elettromagnetico libero tramite le formule derivate dalle correnti di Nöther (2.17) e (2.18) fintantoché si rimanga nella gauge di Coulomb. Si ricordi che la gauge di Coulomb è stata fissata all'inizio di questa sezione, e solo in tale gauge valgono le scomposizioni di Fourier (3.4), (3.5); è in questo che sta la giustificazione della scelta di tale gauge.

**$\mathbf{J}_L$  e  $\mathbf{J}_S$  delle onde piane:** Applichiamo subito le formule così ottenute al caso più semplice, ovvero le onde piane. Considereremo sempre degli intervalli di integrazione simmetrici rispetto allo scambio di coordinate, quindi integreremo su volumi cubici o sferici. Vediamo per prima cosa le onde piane polarizzate linearmente, verificando che per esse  $\mathbf{J}_L = 0$  e  $\mathbf{J}_S = 0$  come è ben noto dalla letteratura.

Si prende l'onda piana polarizzata linearmente con vettore d'onda  $\mathbf{k} = (\omega_k, 0, 0)$  rappresentata dal campo

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{z}} \mathcal{A} \cos(\omega_k(t - x))$$

ove  $\mathcal{A}$  è il modulo del potenziale vettore. Dalle relazioni delle onde in Appendice A si ricava il campo elettrico corrispondente:

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{z}} \omega_k \mathcal{A} \sin(\omega_k(t - x)) = \hat{\mathbf{z}} \mathcal{E} \sin(\omega_k(t - x)) .$$

Evidentemente  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  dunque vale la gauge di Coulomb e possiamo calcolare  $\mathbf{J}_L$ , ricordando che l'unica derivata non banale applicata ad  $\mathbf{A}$  è quella rispetto a  $x$ :

$$\mathbf{J}_L = \int d^3r E_z \begin{pmatrix} y\partial_z - z\partial_y \\ z\partial_x - x\partial_z \\ x\partial_y - y\partial_x \end{pmatrix} A_z = \mathcal{AE} \int d^3r \sin(\omega_k(t-x)) \begin{pmatrix} 0 \\ z\partial_x \cos(\omega_k(t-x)) \\ y\partial_x \cos(\omega_k(t-x)) \end{pmatrix}$$

resta

$$\mathbf{J}_L = \mathcal{AE} \omega_k \int d^3r \begin{pmatrix} 0 \\ z \sin^2(\omega_k(t-x)) \\ y \sin^2(\omega_k(t-x)) \end{pmatrix} = \bar{0}$$

essendo l'integrando dispari rispetto l'inversione  $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$ .

In questo caso  $\mathbf{J}_S$  è evidentemente nullo dato che l'integrando è  $\mathbf{E} \times \mathbf{A}$ , ovvero il prodotto esterno fra due vettori paralleli.

Calcoliamo ora le stesse quantità per le onde piane polarizzate circolarmente in verso levogiro tramite un vettore polarizzazione  $\boldsymbol{\epsilon} = (1, -i, 0)$  con vettore d'onda lungo  $\hat{z}$ :  $\mathbf{k} = (0, 0, \omega_k)$ . Allora i campi reali sono

$$\mathbf{A} = \mathcal{A} \begin{pmatrix} \cos(\omega_k(t-z)) \\ \sin(\omega_k(t-z)) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \mathcal{E} \begin{pmatrix} \sin(\omega_k(t-z)) \\ -\cos(\omega_k(t-z)) \\ 0 \end{pmatrix}$$

e  $\mathbf{J}_L$  diventa

$$\mathbf{J}_L = \mathcal{AE} \int d^3r \left[ \sin(\omega_k(t-z)) \begin{pmatrix} y\partial_z \cos(\omega_k(t-z)) \\ -x\partial_z \cos(\omega_k(t-z)) \\ 0 \end{pmatrix} - \cos(\omega_k(t-z)) \begin{pmatrix} y\partial_z \sin(\omega_k(t-z)) \\ -x\partial_z \sin(\omega_k(t-z)) \\ 0 \end{pmatrix} \right].$$

Svolgendo i conti resta

$$\mathbf{J}_L = \mathcal{AE} \omega_k \int d^3r \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} = \bar{0}$$

perché la funzione integranda è dispari.

Un risultato diverso si ottiene per  $\mathbf{J}_S$ :

$$\mathbf{J}_S = \mathcal{AE} \int d^3r \begin{pmatrix} \sin(\omega_k(t-x)) \\ -\cos(\omega_k(t-x)) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\omega_k(t-x)) \\ \sin(\omega_k(t-x)) \\ 0 \end{pmatrix} = \mathcal{AE} \int d^3r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

sostituendo il modulo del potenziale vettore  $\mathcal{A} = \frac{\mathcal{E}}{\omega_k}$  e chiamando genericamente  $\mathcal{V}$  il volume di integrazione, risulta che

$$\mathbf{J}_S = \hat{z} \frac{\mathcal{E}^2}{\omega_k} \mathcal{V} = \hat{z} \frac{W}{\omega_k} \mathcal{V},$$

ove  $W$  è la densità di energia del campo elettromagnetico. Questo significa che il rapporto fra la densità di momento angolare di spin e la densità di energia del campo è  $\frac{1}{\omega_k}$ , come ci si aspetta quantisticamente da un fotone con elicità  $\sigma = 1$ .



## Capitolo 4

### Un esempio di campo con $J_L \neq 0$ : i *Bessel Beams*

Per concludere questo lavoro studiamo i *Bessel beams*, ovvero un esempio di campo elettromagnetico che ha  $J_L \neq 0$ , e verifichiamo che quest'ultimo sia tale. I *Bessel beams* sono particolari onde elettromagnetiche monocromatiche per le quali l'equazione di Maxwell nella gauge di Lorentz  $\square A^\mu = 0$  assume la semplice forma<sup>1</sup>:

$$\nabla^2 A^\mu(\mathbf{r}, \mathbf{k}) + |\mathbf{k}|^2 A^\mu(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = 0; \quad (4.1)$$

ovvero, dipendono dal tempo attraverso un semplice termine di fase  $e^{i\omega t}$ . La loro particolarità rispetto alle altre famiglie di soluzioni con  $J_L \neq 0$  citate nell'Introduzione è che sono onde costruite in modo tale che l'andamento della loro intensità non vari nello spazio lungo una certa direzione [9]; esse, vedremo, trasportano momento angolare lungo tale direzione [5].

Scriviamo ora un *Bessel beam* generico in modo tale che sia pratico da usare per i nostri scopi:

I *Bessel beams* sono invarianti lungo una direzione, mentre hanno una fase sul piano perpendicolare a tale direzione (fase azimutale), dunque è naturale descriverli nelle coordinate cilindriche  $(\rho, \phi, z)$ . Richiedere l'invarianza lungo una certa direzione significa imporre che la dipendenza dalle coordinate di tale direzione sia completamente contenuta in un termine di fase; ovvero, imporre l'invarianza lungo l'asse  $z$  significa che la dipendenza dell'onda da  $z$  sarà espressa da  $e^{ik_z z}$ . Imporre inoltre una fase azimutale implica richiedere la dipendenza da un termine  $e^{im\phi}$ , ove  $m$  sarà il numero quantico azimutale.

Vogliamo costruire un *Bessel beam* di campo  $A^\mu$  che sia in gauge di Lorentz, cosicché obbedisca all'equazione  $\square A^\mu = 0$ ; questo si può fare introducendo due funzioni scalari di  $(\rho, \phi, z)$ ,  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$  [14], tali che

$$A^0 = \partial_z \Pi_1 \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho} \partial_\phi \Pi_2 \\ -\partial_\rho \Pi_2 \\ \partial_t \Pi_1 \end{pmatrix}; \quad (4.2)$$

---

<sup>1</sup>Questa equazione è anche detta equazione di Helmholtz.

si verifica subito che vale, in coordinate cilindriche, la gauge di Lorentz:

$$\begin{aligned}\partial_\mu A^\mu &= \partial_t A^0 - \frac{1}{\rho} \partial_\rho \rho A_\rho - \frac{1}{\rho} \partial_\phi A_\phi - \partial_z A_z \\ &= \partial_t \partial_z \Pi_1 - \frac{1}{\rho} \partial_\rho \partial_\phi \Pi_2 + \frac{1}{\rho} \partial_\phi \partial_\rho \Pi_2 - \partial_z \partial_t \Pi_1 = 0.\end{aligned}$$

Le funzioni  $\Pi_i$  dipendono da  $z$ ,  $t$  e  $\phi$  nel modo suddetto, e devono soddisfare l'equazione

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Pi_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \Pi_i \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \Pi_i + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Pi_i = 0; \quad (4.3)$$

qualunque soluzione di questa equazione (che sia regolare nell'origine) può essere scritta come una combinazione lineare di

$$\Pi_1 = \frac{\mathcal{B}_K}{k_\perp^2} J_m(k_\perp \rho) e^{i(-\omega t + k_z z + m\phi)} \quad \Pi_2 = \frac{\mathcal{E}_K}{k_\perp^2} J_m(k_\perp \rho) e^{i(-\omega t + k_z z + m\phi)}, \quad (4.4)$$

ove il pedice  $K$  rappresenta l'insieme di numeri quantici  $(m, k_\perp, k_z)$ . Si noti che il vettore d'onda  $\mathbf{k}$  è stato scomposto in parte parallela e parte perpendicolare alla direzione di propagazione:

$$|\mathbf{k}|^2 = k_\perp^2 + k_z^2 = \omega. \quad (4.5)$$

Le funzioni  $J_m$  che soddisfano l'equazione (4.3) sono funzioni di Bessel ordinarie con  $m \in \mathbb{Z}$ , da cui i *Bessel beams* prendono il nome; se ne trova una breve descrizione in Appendice B.

A ogni potenziale  $\Pi_i$  è associato un modo elettromagnetico: a  $\Pi_1$  è associato il modo trasverso magnetico, a  $\Pi_2$  il trasverso elettrico. Si noti che un potenziale  $A$  generato da un modo puramente trasverso elettrico sarà nella gauge di Coulomb, dato che in tal caso sarebbe  $\Pi_1 = 0$  e quindi  $A^0 = 0$ .

Si ha allora un generico campo  $A$  in coordinate cilindriche<sup>2</sup>:

$$A(\rho, \phi, z, t) = \begin{pmatrix} \frac{i\mathcal{E}_K}{2k_\perp} [J_{m-1} + J_{m+1}] e^{i(-\omega t + k_z z + m\phi)} \\ -\frac{\mathcal{E}_K}{2k_\perp} [J_{m-1} - J_{m+1}] e^{i(-\omega t + k_z z + m\phi)} \\ \frac{-i\omega \mathcal{B}_K}{k_\perp^2} J_m(k_\perp \rho) e^{i(-\omega t + k_z z + m\phi)} \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

da cui si possono derivare i campi attraverso le note relazioni

$$E^i = \partial_i A_0 - \partial_0 A_i, \quad B^i = -\frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} (\partial_j A_k - \partial_k A_j).$$

Dopo aver convertito in cilindriche queste ultime, risulta che i campi  $E$  e  $B$  saranno:

$$\begin{aligned}E(\rho, \phi, z, t) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \rho} \Pi_1 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial t \partial \phi} \Pi_2 \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \phi} \Pi_1 + \frac{\partial^2}{\partial t \partial \rho} \Pi_2 \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Pi_1 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Pi_1 \end{pmatrix}, \\ B(\rho, \phi, z, t) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial t \partial \phi} \Pi_1 + \frac{\partial^2}{\partial z \partial \rho} \Pi_2 \\ -\frac{\partial^2}{\partial t \partial \rho} \Pi_1 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \phi} \Pi_2 \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Pi_2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Pi_2 \end{pmatrix};\end{aligned}$$

<sup>2</sup>L'argomento delle funzioni di Bessel  $J_n$  è sempre  $k_\perp \rho$

svolgendo i calcoli risulta

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\rho, \phi, z, t) &= \begin{pmatrix} \frac{ik_z \mathcal{B}_K}{2k_\perp} [J_{m-1} - J_{m+1}] e^{i(-\omega t + k_z z + m\phi)} - \frac{\omega \mathcal{E}_K}{2k_\perp} [J_{m-1} + J_{m+1}] e^{i(-\omega t + k_z z + m\phi)} \\ \frac{k_z \mathcal{B}_K}{2k_\perp} [J_{m-1} + J_{m+1}] e^{i(-\omega t + k_z z + m\phi)} + \frac{i\omega \mathcal{E}_K}{2k_\perp} [J_{m-1} - J_{m+1}] e^{i(-\omega t + k_z z + m\phi)} \\ \mathcal{B}_K J_m e^{i(-\omega t + k_z z + m\phi)} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{B}(\rho, \phi, z, t) &= \begin{pmatrix} \frac{-i\omega \mathcal{B}_K}{2k_\perp} [J_{m-1} + J_{m+1}] e^{i(-\omega t + k_z z + m\phi)} + \frac{ik_z \mathcal{E}_K}{2k_\perp} [J_{m-1} - J_{m+1}] e^{i(-\omega t + k_z z + m\phi)} \\ \frac{i\omega \mathcal{B}_K}{2k_\perp} [J_{m-1} - J_{m+1}] e^{i(-\omega t + k_z z + m\phi)} - \frac{k_z \mathcal{E}_K}{2k_\perp} [J_{m-1} + J_{m+1}] e^{i(-\omega t + k_z z + m\phi)} \\ \mathcal{E}_K J_m e^{i(-\omega t + k_z z + m\phi)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Prima di verificare che il  $J_L$  di un *Bessel Beam* sia diverso da 0, vediamo alcune caratteristiche interessanti di queste soluzioni. Si noti che il vettore d'onda  $\mathbf{k}$  non individua la direzione di propagazione come per le onde piane, ed esso non è in generale perpendicolare ai campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ . Si possono inoltre definire degli stati polarizzati per queste onde, chiamati stati di polarizzazione circolare destra e sinistra; saranno sovrapposizioni di modi trasversi elettrici e magnetici per le quali vale

$$\omega \mathcal{E}_K \pm ik_z \mathcal{B}_K = 0 \quad \text{oppure} \quad \mathcal{E}_K \pm i\mathcal{B}_K = 0. \quad (4.7)$$

Queste sono due condizioni con proprietà differenti che corrispondono tra loro solamente nell'approssimazione parassiale<sup>3</sup>, quindi definire la polarizzazione dei *Bessel beams* non è immediato né univoco. La prima condizione implica che il campo elettrico dell'onda considerata ha componenti lungo la direzione  $\hat{x} \pm i\hat{y}$ , mentre la componente lungo  $\hat{z}$  è trascurabile nell'approssimazione parassiale; la seconda corrisponde ad una base di modi ortonormali nella quale gli operatori che descrivono le quantità fisiche (energia, componente  $z$  del momento, componente  $z$  del momento angolare orbitale e di spin) sono simultaneamente diagonali. Per questa seconda condizione vale inoltre che l'invariante di Lorentz complesso  $(\mathcal{E}_K + i\mathcal{B}_K) \cdot (\mathcal{E}_K^* + i\mathcal{B}_K^*) = 0$ , in analogia con le onde piane [14].

Ci interessa ora verificare effettivamente che  $J_L \neq 0$  per queste onde, usando la formula (2.17). Svolgiamo il conto più semplice possibile, ovvero ci poniamo nella gauge di Coulomb imponendo  $\mathcal{B}_K = 0$  e dunque prendendo solamente una sovrapposizione di onde trasverse elettriche. Il potenziale in questo caso sarà (in coordinate cilindriche)

$$\mathbf{A} = \frac{\mathcal{E}_k}{2k_\perp} \begin{pmatrix} i [J_{m-1} + J_{m+1}] e^{i(-\omega t + k_z z + m\phi)} \\ - [J_{m-1} - J_{m+1}] e^{i(-\omega t + k_z z + m\phi)} \\ 0 \end{pmatrix};$$

ricavare il campo  $\mathbf{E}$  è semplice, dato che  $A_0 = 0$  resta:

$$\mathbf{E}(\rho, \phi, z) = -\partial_t \mathbf{A}(\rho, \phi, z) = \frac{\omega \mathcal{E}_k}{2k_\perp} \begin{pmatrix} - [J_{m-1} + J_{m+1}] e^{i(-\omega t + k_z z + m\phi)} \\ -i [J_{m-1} - J_{m+1}] e^{i(-\omega t + k_z z + m\phi)} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

<sup>3</sup>Un'onda parassiale risolve esattamente l'equazione parassiale:  $\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + 2ik_z \frac{\partial A}{\partial z}$  ( $k_z$  è la componente lungo  $\hat{z}$  del vettore d'onda). Fisicamente un'onda che risolve approssimativamente l'equazione parassiale è un'onda la cui intensità è concentrata quasi interamente lungo un'unica direzione.

Chiamiamo  $\varphi = -\omega t + k_z z + m\phi$  per comodità. Si noti che i campi sono complessi, dunque svolgere il calcolo per  $\mathbf{J}_L$  (nel quale compaiono solo le componenti reali dei campi) significa calcolare 4 quantità:

$$E_{i,RE}(\mathbf{r} \times \nabla) A_{i,RE} = \frac{E_i(\mathbf{r} \times \nabla) A_i + E_i(\mathbf{r} \times \nabla) A_i^* + E_i^*(\mathbf{r} \times \nabla) A_i + E_i^*(\mathbf{r} \times \nabla) A_i^*}{4}.$$

Basta guardare la forma dei campi per capire che il primo e l'ultimo termine daranno contributo nullo all'integrale su un periodo di  $\phi$ , dunque calcoliamo direttamente  $E_i(\mathbf{r} \times \nabla) A_i^* + c.c.$ .

Passiamo l'operatore  $\mathbf{r} \times \nabla$  in coordinate cilindriche:

$$\begin{aligned} r(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow r(\rho, \phi, z) = \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \quad \nabla = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \longrightarrow \nabla = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho} \partial_\rho \rho \\ \frac{1}{\rho} \partial_\phi \\ \partial_z \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \mathbf{r} \times \nabla = \begin{pmatrix} -\frac{z}{\rho} \partial_\phi \\ \frac{z}{\rho} \partial_\rho \rho - \rho \partial_z \\ \partial_\phi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vediamo  $\mathbf{J}_L$  nella direzione di propagazione, ovvero calcoliamone la componente  $z$ :

$$\begin{aligned} E_i(\mathbf{r} \times \nabla)_z A_i^* &= E_\rho \partial_\phi A_\rho^* + E_\phi \partial_\rho A_\phi^* = \\ &= \frac{m\omega \mathcal{E}_K}{(2k_\perp)^2} e^{i\varphi} [J_{m-1} + J_{m+1}]^2 \mathcal{E}_K^* e^{-i\varphi} + \frac{m\omega \mathcal{E}_K}{(2k_\perp)^2} e^{i\varphi} [J_{m-1} - J_{m+1}]^2 \mathcal{E}_K^* e^{-i\varphi} \\ &= m \frac{\omega |\mathcal{E}_K|^2}{2k_\perp^2} [J_{m-1}^2 + J_{m+1}^2], \end{aligned}$$

questa è una funzione reale quindi

$$E_i(\mathbf{r} \times \nabla)_z A_i^* + c.c. = m \frac{\omega |\mathcal{E}_K|^2}{k_\perp^2} [J_{m-1}^2 + J_{m+1}^2].$$

Vale così

$$J_{L,z} = \frac{m}{4} \int \rho d\rho d\phi dz \frac{\omega |\mathcal{E}_K|^2}{k_\perp^2} [J_{m-1}^2 + J_{m+1}^2] = m \frac{\pi}{2} \int \rho d\rho dz \frac{\omega |\mathcal{E}_K|^2}{k_\perp^2} [J_{m-1}^2 + J_{m+1}^2];$$

la densità di  $\mathbf{J}_L$  all'interno dell'integrale è non nulla su un generico cilindro di raggio  $R$  e lunghezza  $l$ , ed è inoltre proporzionale al numero quantico azimutale  $m$  come ci si aspettava. Si calcola facilmente allo stesso modo anche la componente  $z$  del momento angolare di spin:

$$J_{S,z} = \frac{1}{4} \int \rho d\rho d\phi dz (\mathbf{E} \times \mathbf{A}^*)_z + c.c.,$$

$$(\mathbf{E} \times \mathbf{A}^*)_z = E_\rho A_\phi - E_\phi A_\rho = 2 \left[ \frac{w |\mathcal{E}_K|^2}{(2k_\perp)^2} [J_{m-1} + J_{m+1}] [J_{m-1} - J_{m+1}] \right]$$

quindi

$$J_{S,z} = \frac{1}{4} \int \rho d\rho d\phi dz \frac{w |\mathcal{E}_K|^2}{(k_\perp)^2} [J_{m-1}^2 - J_{m+1}^2] = \frac{\pi}{2} \int \rho d\rho dz \frac{w |\mathcal{E}_K|^2}{(k_\perp)^2} [J_{m-1}^2 - J_{m+1}^2];$$

questo da un risultato nullo, infatti l'integrale

$$\begin{aligned} \int \rho d\rho [J_{m-1}^2 - J_{m+1}^2] &= \int \rho d\rho [J_{m-1} - J_{m+1}] [J_{m-1} + J_{m+1}] = \\ &= \frac{4m}{k_\perp} \int d\rho J_m J'_m = \frac{2m}{k_\perp} J_m^2 \Big|_0^\infty = 0 \end{aligned}$$

come sappiamo dall' Appendice B, ove mostriamo che tutte le  $J_m$  passano per l'origine e si annullano all'infinito. Questo significa che l'elicità del *Bessel beam* da noi costruito è nulla, e dunque l'onda elicoidale da noi costruita è in un certo senso polarizzata linearmente.

Abbiamo così verificato analiticamente che esistono soluzioni delle equazioni di Maxwell con momento angolare orbitale  $J_L$  finito e non nullo. Concludiamo questa tesi con una figura che spieghi visivamente la differenza tra *Bessel beams* con diversi valori di  $m$ :

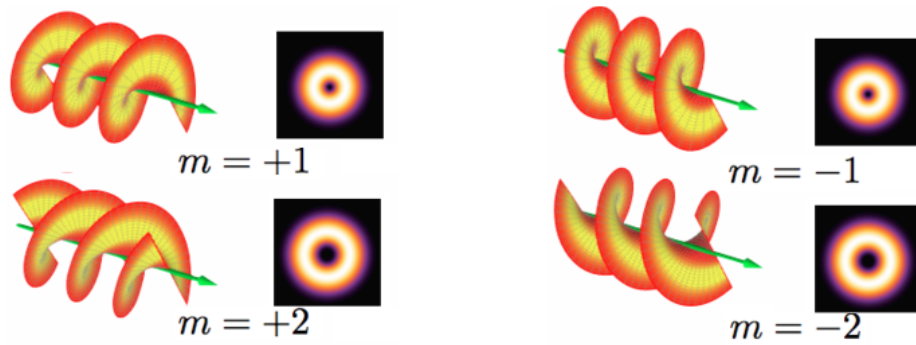


Figura 4.1: Sono disegnati i fronti d'onda elicoidali per *Bessel beams* con  $m = \pm 1$ ,  $m = \pm 2$ . La figura a fianco del fronte d'onda è la distribuzione dell'intensità su un piano perpendicolare alla direzione di propagazione. Si noti come all'aumentare di  $m$  i fronti d'onda si complicano, risultando nella somma di più eliche.



## Appendice A

### Relazioni delle onde

Nel caso in cui il campo  $A^\mu$  sia descritto da un'onda elementare

$$A^\mu(r^\mu) = \varepsilon^\mu(\mathbf{k}) e^{ik \cdot r} + c.c. \quad (A.1)$$

si può dimostrare che per il campo elettromagnetico libero valgono le relazioni dette relazioni delle onde:

$$\partial_\mu A^\nu = n_\mu \dot{A}^\nu \quad n_\mu \dot{A}^\mu = 0 \quad n^\mu n_\mu = 0, \quad (A.2)$$

ove  $n^\mu$  è il versore del quadrivettore d'onda  $k^\mu$ . Queste valgono per le onde piane, ovvero per le onde con  $k^\mu \varepsilon_\mu = 0$ ; quest'ultima relazione significa in particolare che il vettore polarizzazione  $\varepsilon$  giace su un piano perpendicolare alla direzione di propagazione, individuata da  $\mathbf{k}$ .

Con queste relazioni si può rielaborare il campo elettromagnetico  $F^{\mu\nu}$ , e trovare le espressioni dei campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  per quanto riguarda le onde piane monocromatiche:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = n^\mu \dot{A}^\nu - n^\nu \dot{A}^\mu$$

$$E^i = F^{i0} = n^i \dot{A}^0 - \dot{A}^i = (n^i n^j - \delta^{ij}) \dot{A}^j \quad B^i = -\frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} F^{jk} = -\varepsilon^{ijk} n^j \dot{A}^k.$$

Si noti come il termine  $n^i n^j - \delta^{ij}$  che compare nell'espressione del campo elettrico sia un proiettore sullo spazio ortogonale a  $\mathbf{n}$ . Questo significa che

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{inoltre} \quad B^i n^i = -\varepsilon^{ijk} n^j \dot{A}^k n^i = 0 \implies \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$$

come ci si aspetta per le onde piane. Si verifica anche che

$$(\mathbf{n} \times \mathbf{E})^i = \varepsilon^{ijk} n^j E^k = -\varepsilon^{ijk} n^j \dot{A}^k = B^i \implies \mathbf{B} \cdot \mathbf{E} = 0, \quad |\mathbf{B}| = |\mathbf{E}|;$$

questo implica che entrambi gli invarianti di Lorentz

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \alpha (|\mathbf{E}|^2 - |\mathbf{B}|^2) \quad \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} = \beta \mathbf{B} \cdot \mathbf{E}$$

sono nulli per le onde piane. Questi risultati li usiamo nella trattazione.





## Appendice B

### Funzioni di Bessel ordinarie

Le funzioni di Bessel  $Y(x)$ , dette anche armoniche cilindriche, sono le soluzioni all'equazione di Bessel

$$x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} Y(x) + x \frac{\partial}{\partial x} Y(x) + (x^2 - m^2) Y(x) = 0 \quad (\text{B.1})$$

ove  $m$  è un numero arbitrario. Ricercando la soluzione dell'equazione ordinaria nella forma generale della serie di potenze crescente in  $x$ , si ottiene l'insieme di soluzioni dette funzioni di Bessel ordinarie (o del primo tipo)  $J_m(x)$

$$J_m(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n! \Gamma(m+n+1)} . \quad (\text{B.2})$$

Non intendiamo studiare dettagliatamente queste funzioni; ci limitiamo a riportare le loro proprietà più importanti che usiamo nel testo. Per le  $J_m(x)$  vale che:

$$J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x), \quad m \in \mathbb{R}; \quad (\text{B.3})$$

inoltre, per  $m \in \mathbb{Z}$  e  $x \in \mathbb{R}$  la funzione  $J_m(x)$  è reale. Per le funzioni di Bessel valgono inoltre le due proprietà:

$$J_m(x) = \frac{x}{2m} [J_{m-1}(x) + J_{m+1}(x)] , \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{\partial J_m}{\partial x} = \frac{1}{2} [J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x)] \quad (\text{B.5})$$

che si rivelano molto utili per svolgere i calcoli.

Riportiamo in Figura B.1 3 esempi di funzioni di Bessel  $J_m$ ; si noti come queste funzioni convergano, e dunque tendano a 0 all'infinito. Inoltre, tutte le funzioni di Bessel passano per l'origine. L'integrale di  $J_m(x)$  su  $[0; \infty]$  risulta 1 per qualsiasi  $m$ ; per  $m$  pari,  $J_m$  è pari e dunque l'integrale su  $[-\infty; \infty]$  risulta 2, mentre per  $m$  dispari  $J_m$  è dispari e dunque il suo integrale su tale intervallo è nullo.

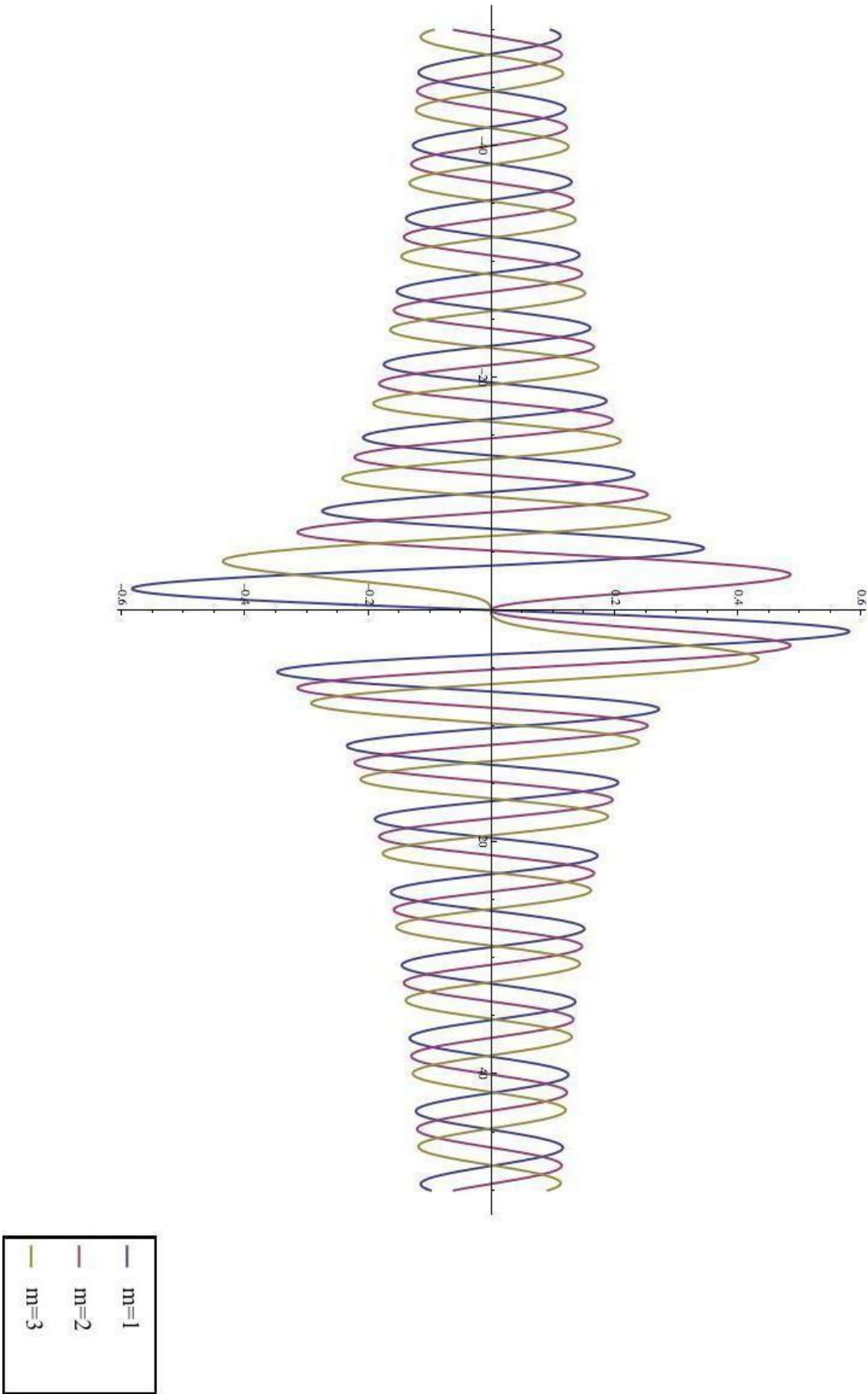


Figura B.1.: 3 funzioni  $J_m$

# Appendice C

## Dimostrazioni aggiuntive

Riportiamo qui alcune dimostrazioni omesse nel testo, tutte relative al capitolo 4. Dato che lavoriamo nello spazio dei momenti, tutte le derivate parziali rispetto alle componenti di  $\mathbf{k}$  del tipo  $\frac{\partial}{\partial k_m}$  verranno abbreviate col simbolo  $\partial_m$  per semplicità:

### C.1 Sostituzione delle componenti di Fourier del campo elettrico $\mathbf{E}(\mathbf{k})$ nelle (3.4) e (3.5)

$J_L$ : Si dimostra che sostituendo (3.25) nella (3.4) si ottiene

$$J_L = i\hbar N \int \frac{d^3 k}{\hbar \omega} \mathbf{f}^* \cdot [\mathbf{D} \times \mathbf{k}] \mathbf{f} = i\hbar N \int \frac{d^3 k}{\hbar \omega} \mathbf{f}^* \cdot [(\nabla_{\mathbf{k}} - i\hat{\chi}\alpha(\mathbf{k})) \times \mathbf{k}] \mathbf{f}; \quad (\text{C.1})$$

per fare ciò si prende la scomposizione di Fourier del campo elettrico espressa in funzione della funzione d'onda del fotone

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}) = \sqrt{\frac{N}{2}} [e(\mathbf{k})f_+(\mathbf{k}) + e^*(\mathbf{k})f_-(\mathbf{k})]$$

e la si sostituisce nell'equazione (3.4):

$$J_L = -iN \int \frac{d^3 k}{\omega_k} [e_i^* f_+^* + e_i f_-^*] (\mathbf{k} \times \nabla_k) [e_i f_+ + e_i^* f_-].$$

L'integrando è composto da 4 termini:

$$e_i^* f_+^* (\mathbf{k} \times \nabla_k) e_i f_+ + e_i f_-^* (\mathbf{k} \times \nabla_k) e_i^* f_- + e_i^* f_+^* (\mathbf{k} \times \nabla_k) e_i^* f_- + e_i f_-^* (\mathbf{k} \times \nabla_k) e_i f_+.$$

I primi due risultano

$$f_+^* (\mathbf{k} \times \nabla_k) f_+ + f_-^* (\mathbf{k} \times \nabla_k) f_- + |f_+|^2 e_i^* (\mathbf{k} \times \nabla_k) e_i + |f_-|^2 e_i (\mathbf{k} \times \nabla_k) e_i^*;$$

i primi due termini di quest'espressione danno

$$-\mathbf{f}^* \cdot (\nabla_k \times \mathbf{k}) \mathbf{f}.$$

I termini rimanenti vanno rielaborati con la regola di derivazione riportata nella (3.22):

$$e_i^* (\mathbf{k} \times \nabla_k) e_i = e_i^* \varepsilon_{klm} k_l \partial_m e_i = e_i^* \varepsilon_{klm} k_l \left( -\frac{e_m n_i}{\omega} - i \alpha_m e_i \right) = i e_k n_i e_i^* - i (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\alpha}) ;$$

$n_i e_i^* = 0$  così come  $n_i e_i = 0$ , quindi dei due termini restanti resta solamente

$$-i |f_+|^2 (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\alpha}) + i |f_-|^2 (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\alpha}) = -i \mathbf{f}^* (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\alpha}) \hat{\chi} \mathbf{f}.$$

Sviluppando poi i rimanenti termini dell'integrando

$$e_i^* f_+^* (\mathbf{k} \times \nabla_k) e_i^* f_- + e_i f_-^* (\mathbf{k} \times \nabla_k) e_i f_+$$

risulta che in essi compaiono o prodotti interni del tipo  $\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e}^*$ ,  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}$  oppure del tipo  $\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{e}^* = 0$ ,  $\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{e} = 0$ , che sono tutti nulli. Dunque l'integrale diventa

$$J_L = iN \int \frac{d^3 k}{\omega_k} [ \mathbf{f}^* \cdot (\nabla_k \times \mathbf{k}) \mathbf{f} - i \mathbf{f}^* (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{k}) \hat{\chi} \mathbf{f} ]$$

che è proprio lo sviluppo di (C.1).

$J_S$ : La dimostrazione per  $J_S$  è più facile; sostituendo semplicemente (3.25) nella (3.5) si ha:

$$\begin{aligned} J_S &= -iN \int \frac{d^3 k}{\omega_k} [ \mathbf{e}^* f_+^* + \mathbf{e} f_-^* ] \times [ \mathbf{e} f_+ + \mathbf{e}^* f_- ] \\ &= -iN \int \frac{d^3 k}{\omega_k} [ -|f_+|^2 + |f_-|^2 ] \\ &= iN \int \frac{d^3 k}{\omega_k} \mathbf{f}^* \cdot \hat{\chi} \mathbf{n}_k \mathbf{f} \end{aligned}$$

note le regole (3.19).

□

## C.2 La derivata rispetto a $k$ del vettore polarizzazione $e(k)$

Verifichiamo che vale

$$\frac{\partial e_j}{\partial k_m} = -\frac{e_m n_j}{\omega} - i \alpha_m e_j.$$

Il vettore  $e(\mathbf{k})$  è ortogonale al vettore direzione  $\mathbf{n}_k$ , dunque vale in generale che la sua derivata rispetto a  $k_m$  può essere scritta come

$$\frac{\partial e_j}{\partial k_m} = x_m n_j - i \beta_m e_j ;$$

dimostriamo prima che  $x_m = -\frac{e_m}{\omega}$ : nota la relazione

$$e_i^*(\mathbf{k}) e_j(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \left( \delta_{ij} + i \varepsilon_{ijl} \frac{k_l}{|\mathbf{k}|} \right)$$

deriviamo a destra e sinistra per  $k_m$ :

$$\partial_m e_i^* e_j + e_i^* \partial_m e_j = \frac{1}{2\omega} \left[ -(\delta_{im} - n_i n_m) n_j - (\delta_{jm} - n_j n_m) n_i + i \varepsilon_{ijl} (\delta_{lm} - n_l n_m) \right],$$

se moltiplichiamo a destra e sinistra per  $e_i n_j$  resta

$$n_j \partial_m e_j = \frac{1}{2\omega} \left[ -e_i (\delta_{im} - n_i n_m) + i \varepsilon_{ijm} e_i n_j \right]$$

e se esplicitiamo la derivata di  $e_j$  risulta che vale

$$x_m = \frac{1}{2\omega} \left[ -e_m + i (e \times n)_m \right] = -\frac{e_m}{\omega}.$$

Si verifica poi che  $\beta$  è definito a meno di una trasformazione di gauge; ruotando infatti il vettore  $e$  di una fase  $\varphi$  risulta che:

$$e \longrightarrow e' = e^{-i\varphi} e,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial e'_j}{\partial k_i} &= \partial_i e^{-i\varphi} e_j + e^{-i\varphi} \partial_i e_j \\ &= -i \partial_i \varphi e'_j + \left[ -\frac{e'_j n_j}{\omega} - i \beta_i e'_j \right] \\ &= -\frac{e'_j n_j}{\omega} - i (\beta_i + \partial_i \varphi) e'_j = -\frac{e'_j n_j}{\omega} - i \beta'_i e'_j. \end{aligned}$$

Per  $\beta$  valgono infine le stesse regole di derivazione che valgono per  $\alpha$ , ovvero

$$\partial_l \beta_m - \partial_m \beta_l = -\varepsilon_{lmn} \frac{n_n}{|\mathbf{k}|^2}.$$

Infatti:

$$\beta_m = i \left[ \frac{\partial e_j}{\partial k_m} + \frac{e_m}{\omega} n_j \right] e_j^* = i \frac{\partial e_j}{\partial k_m} e_j^*,$$

prendiamone la combinazione di derivate

$$\partial_l \beta_m - \partial_m \beta_l = i \partial_l \left[ e_j^* \partial_m e_j \right] - (l \leftrightarrow m) = i \partial_l e_j^* \partial_m e_j - (l \leftrightarrow m)$$

e sostituiamoci l'espressione per le derivate di  $e$  che abbiamo appena trovato; risulta quindi:

$$\begin{aligned} &\left( -\frac{e_l^* n_j}{\omega} + i \beta_l e_j^* \right) \left( -\frac{e_m}{\omega} n_j - i \beta_m e_j \right) - (l \leftrightarrow m) = \\ &= \frac{e_l^* e_m}{\omega^2} + i \beta_l \beta_m - (l \leftrightarrow m) = -i \varepsilon_{lmk} \frac{n_k}{\omega^2} \end{aligned}$$

note le proprietà del vettore polarizzazione  $e$  (3.19). Su  $\beta$  sono imposte le stesse condizioni imposte su  $\alpha$ , dunque essi coincidono a meno di una trasformazione di gauge.

□

### C.3 Condizione sulle derivate di $\alpha$

L'equazione (3.12) deriva direttamente dalla (3.11):

$$\begin{aligned}
 [D_i, D_j] &= i\hat{\chi}\varepsilon_{ijl} \frac{n_l}{|\mathbf{k}|^2} \\
 &= [\partial_i - i\hat{\chi}\alpha_i, \partial_j - i\hat{\chi}\alpha_j] \\
 &= \partial_i\partial_j - i\hat{\chi}\partial_i\alpha_j - i\hat{\chi}\alpha_i\partial_j - \hat{\chi}^2\alpha_i\alpha_j - (i \leftrightarrow j)
 \end{aligned}$$

Il primo e l'ultimo termine dell'espressione si cancellano con i loro corrispettivi a indici scambiati, dunque semplificando a destra e sinistra l'operatore  $\hat{\chi}$  (cosa lecita essendo quest'ultimo unitario) resta

$$\partial_i\alpha_j + \alpha_i\partial_j - \partial_j\alpha_i - \alpha_j\partial_i = -\varepsilon_{ijl} \frac{n_l}{|\mathbf{k}|^2};$$

applicando ora il termine di sinistra a una funzione  $G(\mathbf{k})$ , l'espressione si semplifica ulteriormente:

$$\begin{aligned}
 \partial_i(\alpha_j G) + \alpha_i\partial_j G - \partial_j(\alpha_i G) - \alpha_j\partial_i G &= \alpha_j\partial_i G + G\partial_i\alpha_j + \alpha_i\partial_j G - \alpha_i\partial_j G - G\partial_j\alpha_i - \alpha_j\partial_i G \\
 &= G(\partial_i\alpha_j - \partial_j\alpha_i).
 \end{aligned}$$

Questo implica direttamente che vale

$$\partial_i\alpha_j - \partial_j\alpha_i = -\varepsilon_{ijl} \frac{n_l}{|\mathbf{k}|^2}$$

□

# Bibliografia

- [1] Kurt Lechner. Elettrodinamica classica; capitolo 3. e capitolo 5. *UNITEXT / Collana di Fisica e Astronomia*, 2014.
- [2] L. Allen and M. Padgett. The orbital angular momentum of light: An introduction. *Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA*, 2011.
- [3] S. J. Van Enk and G. Nienhuis. Commutation rules and eigenvalues of spin and orbital angular momentum of radiation fields. *J. Mod. Opt.*, 41(5):963 – 977, 1994.
- [4] J.S.Lomont and H. E. Moses. Simple realizations of the infinitesimal generators of the proper orthochronous inhomogeneous lorentz group for mass zero. *J. of Math. Phys.*, 3(3):405 – 408, 1962.
- [5] R. Jáuregui and S. Hacyan. Quantum-mechanical properties of bessel beams. *Phys. Rev. A*, 71:033411–033421, 2005.
- [6] Iwo Bialynicki-Birula and Zofia Bialynicka-Birula. Beams of electromagnetic radiation carrying angular momentum: The riemann-silberstein vector and the classical-quantum correspondence. *Optics Communications*, 264(2):342 – 351, 2006.
- [7] Dispensa: Optical tweezers; experiment ot - sjh,rd. *University of Florida - Department of Physics PHY4803L - Advanced Physics Laboratory*, 2013.
- [8] M. Padgett and L. Allen. Light with a twist in its tail. *Contemporary Physics*, 41:275–285, 2000.
- [9] Jr. J. Durnin, J. J. Micelli and J. H. Eberly. Diffraction-free beams. *Phys. Rev. Lett.*, 58(15):1499–1501, 1987.
- [10] K Volke-Sepulveda, V Garcés-Chávez, S Chávez-Cerda, J Arlt, and K Dholakia. Orbital angular momentum of a high-order bessel light beam. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, 4(2):S82, 2002.
- [11] K. J. Moh, X.C. Tuan, J. Bu, R. E. Burge, and Bruce Z. Gao. Generating radial or azimuthal polarization by axial sampling of circularly polarised vortex beams. *Applied Optics*, 46(30):7544–7551, 2007.
- [12] Igor A. Litvin, Angela Dudley, and Andrew Forbes. Poynting vector and orbital angular momentum density of superpositions of bessel beams. *Opt. Express*, 19(18):16760–16771, 2011.
- [13] Iwo Bialynicki-Birula and Zofia Bialynicka-Birula. Canonical separation of angular momentum of light into its orbital and spin parts. *J. Opt.*, 13(6):064014, 2011.
- [14] S. Hacyan and R. Jáuregui. A relativistic study of bessel beams. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, 39, 2006.